DOCUMENT RESUME

ED 186 216 SE 030 379

AUTHOR Anderson, R. D.; And Others
TITLE Matematicas Para El Primer Ciclo Secundario, Volumen II (Parte 2). Traduccion Preliminar de la Edicion en Ingles Revisada. (Mathematics for Junior High School, Volume II, Part 2. Preliminary Translation of the Revised English Edition).
INSTITUTION Stanford Univ., Calif. School Mathematics Study Group.
SPONS AGENCY National Science Foundation, Washington, D.C.
PUB DATE 63
NOTE 309p.; For related documents in Spanish, see SE 030 376-378. Contains occasional light and broken type.
LANGUAGE Spanish

EDRS PRICE MF01/PC13 Plus Postage.
DESCRIPTORS *Bilingual Education; Geometry; *Instructional Materials; Mathematics Curriculum; Mathematics Education; *Mathematics Instruction; Number Systems; *Probability; Secondary Education; *Secondary School Mathematics; *Textbooks
IDENTIFIERS *School Mathematics Study Group

ABSTRACT

This is part two of a two-part SMSG mathematics text for junior high school students. Key ideas emphasized are structure of arithmetic from an algebraic viewpoint, the real number system as a progressing development, and metric and non-metric relations in geometry. Chapter topics include real numbers, similar triangles, variation, polyhedrons, volumes and surface areas, permutations and combinations, and probability. (RH)

GRUPO DE ESTUDIO DE LA MATEMATICA ESCOLAR

MATEMATICAS PARA EL PRIMER CICLO SECUNDARIO

VOLUMEN II (Parte 2)

(Traducción preliminar de la edición en inglés revisada)

MATEMATICAS PARA EL PRIMER CICLO SECUNDARIO

VOLUMEN II (Parte 2)

(Traducción preliminar de la edición en inglés revisada)

Texto preparado bajo la supervisión del Personal para los Grados de Estudio 7º y 8º, del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar:

R.D. Anderson, Universidad del Estado de Luisiana

J.A. Brown, Universidad de Delaware

Lenore John, Universidad de Chicago

B.W. Jones, Universidad de Colorado

P.S. Jones, Universidad de Michigan

J.R. Mayor, Asociación Americana para el Avance de la Ciencia

P.C. Rosenbloom, Universidad de Minnesota

Veryl Schult, Supervisor de Matemáticas, Wáshington, D.C.

El apoyo financiero para el Grupo de Estudio de la Matemática Escolar provino de la Fundación Nacional de Ciencias.

Proyecto de Traducción al Español

Comisión Consultiva

Edward G. Begle, Universidad de Stánford

Howard F. Fehr, Universidad de Columbia

Mariano García, Universidad de Puerto Rico

Max Kramer, San Jose State College

TABLA DE MATERIAS

Capítulo

NOTA: Algunos ejercicios han sido marcados con un asterisco (*) para orientar al maestro en la selección de los mismos.

Capítulo 7

PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

7-1. El triángulo de Pascal

Cinco estudiantes forman un club. Los llamaremos por sus iniciales A, B, C, D y E. Naturalmente, la primera tarea de los miembros del club es nombrar un comité de refrescos. Se conviene en que el comité debe tener tres miembros. ¿Cuántas posibilidades crees que hay de elegir a los miembros del comité?

Una posibilidad sería formar un comité con B, C y E. Abreviadamente designaremos este comité posible con el símbolo {B, C, E}.

Ejercicios de clase 7-1a

1. Otra lista posible de miembros para el comité contiene a los siguientes: A, D y E. Escribe el símbolo abreviado para este caso.
2. ¿Tiene el comité {B, E, A} los mismos miembros que el comité {E, A, B}?
3. Da un segundo símbolo para cada uno de los comités mencionados en el problema 2.
4. Haz una lista de todos los posibles comités de tres miembros.
5. ¿Cuántos comités hay en tu lista?
6. ¿De cuántos de estos comités es miembro D?
7. Compara el número de comités de los cuales B es miembro con el número de comités que incluyen a D.

(Contesta a las siguientes preguntas sin contar.)

8. ¿En cuántos de los comités no figura A?
9. ¿Cuál es la razón del número de comités que incluyen a E al número total de posibles comités? (¿Has contestado a esta pregunta sin contar?)
10. ¿Cuántos comités contienen A y C? Puedes responder fácilmente a esta pregunta sin mirar la lista de comités posibles. Observa que, como el comité {A, C, ?} tiene dos miembros fijos, no hay más que un puesto por llenar. ¿Cuántas

posibilidades de elección hay para el tercer miembro? Entonces, en tres de los diez posibles comités están juntos C y A.

11. ¿Cuál es la razón del número de comités posibles que incluyen a ambos, B, y E, al número de comités que incluyen a B?

Cada vez que se escogen a tres estudiantes de los cinco para algún fin especial, como miembros de un comité, entonces los dos miembros restantes también quedan "escogidos", es decir, eliminados de este comité particular. En otras palabras, la selección de un comité en realidad separa los miembros del club en dos conjuntos. Una manera de seleccionar los miembros de un comité es decidir qué miembros del club no deben estar en él. Por ejemplo, si se decide que un comité no debe incluir a C y D, entonces sabemos que está formado por {A, B, E}.

12. Indica el comité determinado por la condición de que A y E sean escogidos como no miembros.

13. ¿Qué dos estudiantes han sido escogidos como no miembros en {E, B, C}? La selección de un comité de tres miembros también significa la selección de otro comité de dos miembros, a saber, los otros dos de los cinco miembros del club. Por ejemplo, la selección de {E, B, C} determina el conjunto de dos miembros o comité {A, D}.

14. Como hay diez posibles comités de tres miembros cada uno, ¿cuántos posibles comités de dos miembros hay?

15. Como seis de los posibles comités de tres miembros incluyen a B, ¿cuántos de los posibles comités de dos miembros excluyen a B?

16. ¿Cuántos de los posibles comités de dos miembros incluyen a C?

17. Averigua la respuesta al problema 16, empleando el método de llenar el puesto vacío en el comité {C, ?}.

Ejercicios 7-1a

1. En el club {A, B, C, D, E}, un comité posible de cuatro miembros es {A, B, D, E}.
   (a) Haz una lista de todos los posibles comités con cuatro miembros.

(b) ¿Cuántos miembros se excluyen cada vez que se forma un comité de cuatro miembros?

(c) Haz una lista de todos los posibles comités con un miembro cada uno.

(d) ¿Qué relación hay entre el número de comités posibles con cuatro miembros cada uno y el número de comités posibles con un miembro cada uno?

(e) ¿Cuántos comités hay en que estén todos los cinco miembros?

2. Un club tiene cuatro miembros a los que designaremos por K, L, M y N.

(a) ¿Cuántos posibles comités de este club pueden tener cuatro miembros?

(b) ¿Cuántos posibles comités se podrían formar con un miembro cada uno?

(c) Indica todos los posibles comités de un miembro.

(d) A cada comité con un miembro le corresponde, de una manera natural, un comité con tres miembros. ¿Cuál es esa manera natural?

(e) Utiliza las preguntas (c) y (d) para hacer una lista de los posibles comités de tres miembros cada uno.

(f) Haz una lista de los posibles comités de dos miembros cada uno.

3. Haz una lista de todos los comités posibles, e indica cuántos comités de cada tamaño hay en un club de tres miembros. (Designa esos miembros con P, Q y R.)

4. Haz lo mismo que se pide en el problema 3, pero para un club de dos miembros. Llámalos U y V.

5. Haz lo mismo que se indica en el problema 3, pero para un club de exactamente un miembro.

6. Una familia podría pasar sus vacaciones en cuatro lugares diferentes. Resuelve tomar dos de los cuatro y pasar una parte de las vacaciones en uno y otra parte en el otro. ¿De cuántas maneras posibles se pueden seleccionar esos dos lugares?

7. La refrigeradora puede contener dos cajas de helados. En la heladería se venden helados de cinco sabores diferentes, y la familia compra siempre dos cajas de sabores diferentes.

¿De cuántas maneras posibles puede la familia llevar a casa dos cajas de sabores diferentes?

Construyamos una tabla que muestre el número de posibles comités con un número dado de miembros tomados de un club de cinco miembros. Esa tabla resumirá varios de los resultados que hemos obtenido en los problemas anteriores. En un club con cinco miembros, hay 5 posibles comités de un miembro, 10 comités de dos miembros, 10 comités de tres miembros, 5 comités de cuatro miembros y 1 comité de cinco miembros. La selección de un comité que incluya a los cinco miembros del club significa que hay cero miembros del club descartados. Entonces, podríamos equilibrar nuestra tabla diciendo que hay un posible comité de cero miembros. (Probablemente quieras comparar este convenio con la observación de que hay exactamente un conjunto vacío.)

Si disponemos nuestros datos de acuerdo al tamaño <u>creciente</u> de los comités, tenemos la siguiente sucesión:

1 5 10 10 5 1

Estos seis números nos dicen de cuántas maneras posibles se pueden escoger comités de varios tamaños de entre los cinco miembros de un club.

El mismo tipo de datos, para un club de cuatro miembros, es el siguiente:

1 4 6 4 1

Asegúrate de que comprendes el significado de cada una de estas cinco cifras.

Ahora tenemos dos filas de la tabla que estamos construyendo.

<u>Ejercicios de clase 7-1b</u>

1. En particular, ¿qué significa el último 1 de los datos 1, 4, 6, 4, 1?
2. ¿Qué significa el primer 1?
3. ¿Cuáles son los correspondientes números para un club de tres miembros?

4. ¿Cómo puedes interpretar los datos

1 2 1?

5. ¿Qué datos de este tipo tenemos para un club integrado por solamente un miembro?

Coleccionemos en una tabla los datos para los varios clubs. Cada fila de la siguiente tabla muestra la información referente a un club de cierto tamaño.

				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

Examinemos nuevamente el número de la tabla que nos indica cuántos posibles comités de tres miembros se pueden escoger del club {A, B, C, D, E}. ¿Cuál de los números 10 de la tabla es?

Un comité de tres miembros puede incluir a E o no incluirlo. Estudiaremos estos dos casos con mayor detalle.

6. ¿Cuántos posibles comités de tres miembros incluyen a E?
7. Un comité que incluye a E es de la forma {E, ?, ?}. ¿Cuántas vacantes aparecen? ¿Cuántos miembros hay disponibles para llenar esas vacantes? ________________
8. Teniendo presente el problema 7, compara la respuesta al problema 6 con el número posible de comités de dos miembros tomados de un club de cuatro miembros.
9. ¿Cuántos posibles comités de tres miembros excluyen a E?
10. Un comité que excluye a E es de la forma {?, ?, ?} donde ningún espacio en blanco puede ser llenado con E. ¿Cuántos espacios en blanco aparecen? ¿Cuántas posibilidades tenemos de llenar esos espacios en blanco?
11. Teniendo presente el problema 10, la respuesta al problema 9 es la misma que: el número de comités con ___(¿cuántos?)___ miembros tomados de un club de ___(¿cuántos?)___ miembros.

En la tabla siguiente, hemos encerrado en un círculo los tres números que hemos estado estudiando.

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

El número 10 es la suma de los dos números 6 y 4, que son los más próximos a él en la fila anterior.

La tabla que hemos estado estudiando es una parte del cuadro conocido con el nombre de triángulo de Pascal. (El matemático francés Pascal, en el siglo XVII, contribuyó al desarrollo de la geometría y de la teoría de las probabilidades.) La tabla se parecería aún más a un triángulo equilátero si le pusiéramos un vértice en la parte superior; algunas veces se hace así, pero no nos referiremos a él en este curso. En nuestra versión del triángulo de Pascal, las filas primera, segunda, tercera, cuarta y quinta muestran los números de comités posibles tomados de un club con uno, dos, tres, cuatro y cinco miembros, respectivamente. Copia el "triángulo" y agrega la fila correspondiente a un club de seis miembros.

Ejercicios 7-1b

1. Verifica que (con excepción de las cifras uno) todo número de la tabla es la suma de los dos números más próximos a ella situados en la fila anterior.
2. (a) ¿Qué significa el 6 de la cuarta fila?
   (b) ¿Qué significa el primer 3 de la tercera fila?
3. (a) ¿Qué significa el segundo 15 de la sexta fila?
   (b) ¿Qué significa el segundo 10 de la quinta fila?
4. (a) ¿Qué cifra indica el número de comités posibles de dos miembros, tomados de un club de seis miembros?
   (b) ¿Qué cifra indica el número de comités posibles de un miembro, tomados de un club de cinco miembros?

5. Un club tiene seis miembros que denotaremos con A, B, C, D, E y F.
   (a) Algunos de los posibles comités de dos miembros son {A, B}, {A, C} y {C, E}. Haz una lista de los quince comités de este tipo. (Escribe tu lista de arriba abajo en una hoja de papel, empleando quince filas.)
   (b) A la derecha de tu respuesta a (a), haz una lista de todos los posibles comités de cuatro miembros. Específicamente, escribe al lado de cada comité de la lista que has hecho para (a), el comité cuyos cuatro miembros están excluidos del comité de dos miembros. Por ejemplo, una fila de tu respuesta sería

   {A, C} {B, D, E, F}

   (c) Después de que hayas escrito tu lista de comités de cuatro miembros cada uno, indica cómo puedes obtener el número de esos comités posibles sumando dos números obtenidos de la <u>quinta</u> fila del triángulo de Pascal.
   (d) Haz una lista completa de todos los comités posibles de tres miembros cada uno.
   (e) ¿Coincide el número de los comités enumerados en (d) con algún número obtenido de la quinta fila del triángulo de Pascal?
6. Halla la séptima fila del triángulo de Pascal.
7. Halla la octava fila del triángulo de Pascal.
8. ¿Cuáles son los primeros dos números (de la izquierda) de la fila número veintitrés del triángulo de Pascal?
9. ¿Cuáles son los dos últimos números (de la derecha) de la fila número cincuenta y siete del triángulo de Pascal?

7-2. Permutaciones

Suponte que el club cuyos cinco miembros son A, B, C, D y E nombra un comité ejecutivo para representarlo. El comité ejecutivo tiene tres miembros: B, D y E. En una sesión del comité, éstos tres miembros deciden asignarse responsabilidades. Uno de ellos

debe ser presidente, otro secretario y el tercero tesorero. ¿De cuántas maneras crees que se pueden distribuir estos cargos entre los tres?

Ejercicios de clase 7-2

1. Si se designa a D como presidente, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden distribuir los otros dos cargos entre B y E?
2. Escribe una lista de estas modalidades en detalle, indicando qué cargo tendría cada miembro.
3. Si se elige a E como presidente, ¿de cuántas maneras pueden darse cargos a los otros dos miembros?
4. ¿De cuántas maneras se pueden asignar los tres cargos a los tres miembros si B es presidente?
5. ¿De cuántas maneras diferentes pueden asignarse los tres cargos a los tres miembros del comité ejecutivo?

Ejercicios 7-2a

1. Un club tiene ocho miembros cuyas iniciales son A, B, C, D, E, F, G y H. Un comité ejecutivo {A, F, H} distribuye los cargos entre sus miembros. Una manera posible es:

   Presidente A, Secretario H y Tesorero F.

   (a) Haz una lista de todas las maneras posibles de asignar estos tres cargos a los tres miembros del comité de manera que cada persona tenga uno.

   (b) ¿Cuántas maneras hay?

2. Cuatro jóvenes—Pablo, Ricardo, Samuel y Tomás—participarán uno tras otro, en una carrera de postas.

   (a) Un orden de partida posible es el siguiente: Primero, Pablo; segundo, Samuel; tercero, Ricardo; cuarto, Tomás. Haz una lista de todos los posibles órdenes de partida. Nota: Una manera de hacer esta lista es fijar las posiciones y tabular luego a los jóvenes que pueden llenarlas. (Usa las letras P, R, S y T para representar a los jóvenes.) Tal tabla podría comenzar así:

Corredor 1 Corredor 2 Corredor 3 Corredor 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
P R S T	R P S T	S P R T	T P R S
P R T S	R P T S	S . . .	T . . .
P S R T	R . . .	S . . .	T . . .
P S T R	R . . .	S . . .	T . . .
P T R S	R . . .	S . . .	T . . .
P T S R	R . . .	S . . .	T . . .

Completa la lista y consérvala para usos futuros.

(b) ¿Cuántos equipos diferentes hay en tu lista?

3. Se hace una encuesta para conocer las preferencias del público respecto de las patatas. Cada persona interrogada tiene que indicar cuál de las siguientes formas le gusta más, cuál prefiere en segundo lugar, y cuál le gusta menos: patatas fritas, puré de patatas y patatas asadas. ¿Cuántos órdenes diferentes de preferencia son posibles?
4. Se distribuyen tres diferentes obsequios entre tres niños. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden distribuir los obsequios?
5. Se van a asignar las posiciones de cuatro caballos en la salida de una carrera. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los caballos entre las posiciones primera, segunda, tercera y cuarta? Si prefieres, puedes utilizar la respuesta a otro problema de este conjunto de ejercicios en vez de hacer una nueva lista.
6. Un vendedor trabaja cinco días por semana, y tiene clientes en cinco ciudades. Acostumbra pasar cada día de la semana en una ciudad distinta. San José está a sólo seis millas de su casa y pasa en ella todos los lunes. Como no le gustan los viajes rutinarios, quiere pasar los otros cuatro días de la semana en las cuatro ciudades restantes de tantas maneras como sea posible. ¿Cuántas semanas puede trabajar sin verse obligado a repetir ninguna de las rutas?

7. Una secretaria tiene cuatro sobres dirigidos a Arias, Barrios, Cruz y Delgado, respectivamente. Tiene además cuatro cartas dirigidas a estos señores, y pone una en cada sobre. ¿De cuántas maneras puede hacerlo para que una o más cartas sean colocadas en sobres equivocados? ¿Será posible colocar exactamente una carta en sobre equivocado?

Hay una diferencia obvia entre los problemas que acabas de resolver y los problemas de la Sección 7-1. En esa sección, el orden en que indicabas a las personas no tenía importancia. Por ejemplo, el comité {A, B, C} era el mismo que el comité {C, B, A}. Entonces, nos interesaba solamente el conjunto que contenía los tres elementos A, B y C.

En el último grupo de ejercicios de clase, hemos formado comités ejecutivos de los individuos B, D y E. Convengamos en que, cuando nombremos un tal comité, el primer nombre corresponderá al presidente, el segundo al secretario y el tercero al tesorero. Entonces {B, D, E} representaría a B como presidente, a D como secretario y a E como tesorero. Por ejemplo, el comité ejecutivo {E, B, D} sería diferente del comité ejecutivo {D, E, B}. En el problema de la carrera de postas, el equipo PTRS sería diferente del equipo RTPS, porque el orden en el cual corren los jóvenes es diferente. En el problema 3 del último conjunto de ejercicios, la preferencia {puré, fritas, asadas} es diferente de la preferencia {fritas, puré, asadas} debido al orden en que se prefieren. Los problemas como éstos, en que es importante el orden, se llaman problemas de permutaciones.

En los problemas de permutaciones interesan las diferentes disposiciones (u ordenaciones) de los objetos o personas. Diremos que PTRS y RTPS son dos permutaciones diferentes de P, R, S y T. Así, en el problema de la carrera de postas, queremos contar el número de permutaciones de cuatro cosas, a saber, P, R, S y T. En el problema de la encuesta, necesitamos contar el número de permutaciones de tres cosas, a saber, tres maneras de preparar patatas.

<u>Definición.</u> Una permutación de un conjunto de elementos es una disposición de los elementos del conjunto en cierto orden.

<u>Cómo contar las permutaciones</u>

Hasta este momento hemos contado el número de permutaciones construyendo listas. Debes hacer las listas cuidadosamente, de manera ordenada y sin omitir ninguna permutación. Necesitamos, pues, un método más rápido y eficiente para contar las permutaciones, especialmente si el número de objetos que hay que permutar es grande.

Supónte que quieres indicar tu preferencia por tres sabores de helados—vainilla, fresa y chocolate (que designaremos con las letras V, F y C). Quieres designar tus preferencias en el orden, primero, segundo y tercero. Tus listas posibles son, por columnas:

1	2	3
V F C	F V C	C F V
V C F	F C V	C V F

Observa que V es la primera preferencia en la columna 1; F es la primera preferencia en la columna 2; y C es la primera preferencia en la columna 3. Esto indica que puedes escoger tu primera preferencia de cualquiera de estas 3 maneras. Supón que has escogido a V como primera preferencia. Quedan dos maneras de escoger una segunda preferencia: o bien F o bien C (como puedes ver en la columna 1). Si tu primera preferencia hubiera sido F, ¿de cuántas maneras hubieras podido escoger la segunda? Si tu primera preferencia hubiera sido C, ¿de cuántas maneras hubieras podido escoger la segunda? Como cada una de las primeras preferencias puede escogerse de 3 maneras, y puesto que para <u>cada</u> una de ellas, la segunda se podría escoger de 2 maneras, ¿cuál es el número total de selecciones posibles para las dos primeras preferencias? Es de esperar que respondas $3 \cdot 2$ maneras. Queda una sola posibilidad de selección para la tercera preferencia. Entonces, el número total de preferencias es $3 \cdot 2 \cdot 1$.

Otra manera de tratar este problema es emplear cuadros para

indicar las preferencias.

3	2	1

Para tu primera preferencia tienes 3 posibles selecciones, que puedes indicar con un 3 en el primer cuadro. Una vez que se ha dado la primera preferencia, tienes solamente dos posibilidades para escoger la segunda preferencia. Esto se indica colocando un 2 en el segundo cuadro. Ahora, habiendo escogido tus dos primeras preferencias, no hay más que una tercera preferencia posible, que indicas con un 1 en el tercer cuadro. Entonces, el número total de preferencias es $3 \cdot 2 \cdot 1$. Observa otra vez que para cada elección de la primera preferencia, hay dos elecciones posibles para la segunda.

Como otra ilustración de este método, consideremos los posibles órdenes de partida para los corredores de postas del equipo P, R, S y T estudiados en el problema 2, Ejercicios 7-2a. Como primer corredor, podemos escoger a uno cualquiera de los cuatro jóvenes. Indicamos esto escribiendo un número 4 en el primer cuadro del diagrama siguiente:

4	3	2	1

Habiendo escogido el primer corredor, podemos tomar a cualquiera de los 3 jóvenes restantes para ocupar la segunda posición. Para cualquier elección especificada de las dos primeras posiciones, tenemos dos elecciones posibles para la tercera posición. Finalmente, habiendo tomado tres jóvenes, no queda más que 1 posible elección para la cuarta posición en el equipo. En consecuencia, el número total de órdenes de partida posibles es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Estas son las 24 ordenaciones de PRST que has encontrado anteriormente.

Ejercicios 7-2b

1. Se trata de formar numerales de dos dígitos empleando los dígitos 6, 7 y 8. Ningún dígito se deberá tomar más de una vez en cada ordenación (es decir, no se permiten numerales como 77).

   (a) ¿Cuántas maneras hay de elegir el primer dígito?

(b) Habiendo escogido el primer dígito, ¿cuántas maneras hay de elegir el segundo?

(c) ¿Cuántos numerales de dos dígitos del tipo permitido pueden escribirse? (Deja la respuesta como producto indicado.)

En los siguientes problemas deja todas las respuestas como productos indicados. ($9 \cdot 8$ no debe escribirse como 72.)

2. Usa los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 para formar numerales de dos dígitos como en el problema 1. ¿Cuántos se pueden formar?

3. ¿Cuántas "palabras" diferentes de dos letras pueden formarse empleando las letras de nuestro alfabeto? Ninguna letra deberá usarse más de una vez en cada ordenación. (No es necesario que la "palabra" formada tenga sentido—¡la disposición de dos letras gt es una "palabra" en este sentido!)

4. Usando los dígitos 6, 7, 8 y 9 sin repetición (como en el problema 1), ¿cuántos numerales de cuatro dígitos pueden formarse?

5. Usa los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 sin repetición.
   (a) ¿Cuántos numerales de tres dígitos se pueden formar?
   (b) ¿Cuántos numerales de cuatro dígitos se pueden formar?
   (c) ¿Cuántos numerales de seis dígitos se pueden formar?

6. Cuatro personas entran en una habitación que contiene 15 sillas dispuestas en fila. ¿De cuántas maneras diferentes podrían sentarse las personas en fila?

7. Supón que hay n sillas colocadas en fila, y que se van a sentar dos personas.
   (a) ¿Cuántas posibles colocaciones tiene la primera persona?
   (b) Después que la primera persona se ha sentado, ¿cuántas colocaciones diferentes tiene la segunda persona?
   (c) ¿Es tu respuesta a la pregunta (b) la misma para cada silla que pueda escoger la primera persona? ¿Por qué?
   (d) ¿Cuántos pares de sillas pueden escoger las dos personas?
   (e) Halla el número de maneras de que tres personas pueden escoger sillas entre n sillas colocadas en fila.

(f) Halla el número de maneras de que cuatro personas pueden escoger sillas entre n sillas colocadas en fila.

En el problema 1 del grupo anterior de ejercicios has hallado el número de permutaciones (u ordenaciones) de 3 cosas diferentes, tomadas 2 a la vez. Usaremos el símbolo $P_{3,2}$ para este número. En el problema 3, se te pidió hallar $P_{26,2}$, el número de permutaciones de 26 cosas diferentes, tomadas 2 a la vez. Usando esta notación, en el problema 7(d) queremos hallar $P_{n,2}$; en el problema 7(e) queremos hallar $P_{n,3}$, el número de permutaciones de n diferentes objetos, tomados 3 a la vez.

En general, decimos que

$P_{n,r}$ = número de permutaciones de n diferentes objetos, tomados r a la vez, ó r a r.

De acuerdo con tus resultados de los problemas anteriores,

$$P_{4,2} = 4 \cdot 3 \qquad P_{9,2} = 9 \cdot 8$$
$$P_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \qquad P_{26,2} = 26 \cdot 25$$
$$P_{4,4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad P_{15,4} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$$
$$P_{n,2} = n(n-1) \qquad P_{n,3} = n(n-1)(n-2)$$

El símbolo $P_{n,r}$ tiene sentido solamente cuando n y r son números naturales y $r \leq n$.

Hay un caso particular de $P_{n,r}$ que es de mucha importancia. En el problema 4 calculabas "el número de permutaciones de 4 objetos, tomados 4 a la vez", o, en forma abreviada, $P_{4,4}$. La respuesta era $P_{4,4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Este es el producto de todos los números naturales en sucesión desde 1 hasta 4. En forma análoga, $P_{5,5} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ es el producto de todos los números naturales desde 1 hasta 5. Tales productos de números naturales sucesivos aparecen con frecuencia en matemáticas y los designamos con un símbolo especial. Escribimos $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ y leemos $5!$ como "factorial de cinco". De modo análogo, "factorial de cuatro" es $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

En general, factorial de n (escrito $n!$) significa el producto de todos los números naturales en sucesión desde 1 hasta n. Entonces,

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Observa que es igualmente correcto escribir

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \quad y$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot (n)$$

En buena parte de nuestro trabajo es probablemente más conveniente escribir $n!$ como $n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, pero puedes escribir $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, si así lo deseas.

Verifica, en una hoja de papel, lo siguiente:

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5{,}040$$

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40{,}320$$

Como ves, la factorial de n crece muy rápidamente a medida que n crece. Entonces, el signo de exclamación " ! " es apropiado para este uso. (Para expresar el mismo sentimiento, los matemáticos ingleses leen algunas veces $n!$ como "n admiración".)

En nuestro trabajo sobre permutaciones hemos observado que

$$P_{3,3} = \left\{\begin{array}{l}\text{número de permutaciones de } 3 \\ \text{objetos diferentes, tomados } 3 \\ \text{a la vez}\end{array}\right\} = 3!, \text{ y}$$

$$P_{4,4} = \left\{\begin{array}{l}\text{número de permutaciones de } 4 \\ \text{objetos diferentes, tomados } 4 \\ \text{a la vez}\end{array}\right\} = 4!$$

Empleando argumentos como los de los párrafos anteriores, podríamos convencernos de que es cierto lo siguiente:

> Si n es un número natural, el número de permutaciones de n objetos diferentes, tomados n a la vez, es factorial de n. En símbolos, escribimos
>
> $$P_{n,n} = n!$$

Ejercicios 7-2o

1. Expresa en forma de productos las siguientes factoriales:

   (a) $6!$ (b) $7!$ (c) $10!$ (d) $15!$

2. Observa que $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4(3 \cdot 2 \cdot 1) = 4(3!)$. De manera análoga, escribe en términos de una segunda factorial cada una de las siguientes factoriales:

   (a) $7!$ (b) $6!$ (c) $10!$ (d) $12!$

3. Halla el cociente de $14!$ dividido por $13!$ (sin efectuar ninguna multiplicación).
4. Muestra, sin efectuar ninguna multiplicación, que $6!$ es el producto de 6, 5 y $4!$.
5. La factorial de 10 es el producto de 10, 9 y otro factor. ¿Cuál es ese tercer factor?
6. Muestra que $62!$ es lo mismo que $62 \cdot 61 \cdot 60!$.
7. ¿Cuántos órdenes diferentes para batear son posibles para un equipo de béisbol de nueve jugadores?
8. En un bote para regatas hay 8 asientos, uno detrás de otro. ¿De cuántas maneras pueden disponerse en esos asientos los 8 miembros de un equipo universitario?
9. ¿Cuántas permutaciones se pueden formar con las letras de la palabra "escolar"?
10. Si uno de los miembros de un equipo de béisbol lanza siempre la pelota, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden disponer los otros miembros para ocupar las otras posiciones del juego? Sólo hay nueve miembros disponibles para el equipo.

Una propiedad multiplicativa general

En nuestras reflexiones sobre disposiciones y elecciones, hemos hecho uso frecuente de la siguiente propiedad:

Propiedad multiplicativa. Si una operación puede hacerse de m maneras y, después de haberse hecho de una de esas maneras, puede hacerse una segunda operación de n maneras, entonces las dos operaciones sucesivas pueden hacerse de $m \times n$ maneras.

Como ilustración informal de esta propiedad, imagina el problema en que te encuentras para escoger helados en una heladería. Tienes para escoger 3 sabores de helados (fresa, vainilla y chocolate). Después que hayas escogido el sabor del helado debes elegir uno de los 2 recubrimientos (mermelada o nueces). Puedes efectuar la primera elección de 3 maneras y luego, después que hayas escogido un sabor particular, puedes hacer de 2 maneras la segunda elección. Entonces, el número total de helados con recubrimientos diferentes es $3 \cdot 2$, es decir, 6. En palabras,

$$\left\{\begin{matrix}\text{número total de hela-}\\ \text{dos con recubrimientos}\\ \text{diferentes}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{número de}\\ \text{sabores}\\ \text{diferentes}\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}\text{número de}\\ \text{recubrimientos}\\ \text{diferentes}\end{matrix}\right\}.$$

Como segunda ilustración, preguntémonos: ¿Cuántas posibles placas de licencia hay si cada placa lleva una letra seguida de 2 dígitos? No se permite usar el cero como primer dígito.

Pensemos el problema en términos de nuestro diagrama de cuadros.

26	9	10

El primer lugar de la placa puede llenarse de 26 maneras posibles, pues podemos emplear una cualquiera de las 26 letras del alfabeto. El segundo cuadro puede llenarse de 9 maneras, pues no podemos emplear cero en esta posición. En la tercera posición podemos escribir uno cualquiera de los 10 dígitos. Entonces, hay en total $26 \cdot 9 \cdot 10 = 26 \cdot 90 = 2,340$ diferentes placas de licencia posibles.

Observa que en el ejemplo anterior hemos empleado la propiedad multiplicativa para tres operaciones sucesivas. En realidad,

pensamos con frecuencia de esta manera cuando se trata de efectuar elecciones sucesivas.

Ejercicios 7-2d

1. Un joven tiene siete camisas y cuatro pares de pantalones. ¿De cuántas maneras diferentes puede ponerse una camisa y un par de pantalones?
2. Un equipo de béisbol tiene cinco lanzadores y tres receptores de pelota. ¿Cuántas baterías (que consisten en un lanzador y un receptor) son posibles?
3. Si las dos primeras letras de la clave de una estación televisora deben ser KT, ¿cuántas claves de cuatro letras diferentes son posibles?
4. Un programador de radiodifusión tiene 50 discos en su colección y quiere hacer un programa de dos discos diferentes. ¿Cuántos programas puede hacer? (Considera como programas diferentes a dos que tienen los mismos discos, pero en orden diferente.)
5. Un señalizador tiene seis banderas. Los emblemas de las diversas banderas son: una franja, un punto, un triángulo, un rectángulo, una barra y un círculo. Se puede transmitir una señal mediante dos banderas, levantando una tras otra. ¿Cuántas señales diferentes son posibles?
6. ¿Cuántas placas de licencia se pueden hacer si cada una debe llevar una letra seguida de tres dígitos? (El primer dígito no debe ser cero. Como en la ilustración anterior, se permite la repetición de dígitos en los dos últimos lugares.)
7. Un conjunto de cinco banderas tiene una de cada uno de los siguientes colores: rojo, verde, amarillo, azul y blanco. Se deben izar tres banderas, una debajo de la otra, en el mismo mástil. ¿Cuántas disposiciones diferentes son posibles?
8. ¿Cuántas diferentes placas de licencia se pueden hacer empleando dos letras seguidas de dos dígitos? El primer dígito no deberá ser cero.
9. ¿Cuántas placas de licencia se podrían construir empleando cuatro dígitos, siendo el primero diferente de cero?

10. Un estudiante tiene 10 libros diferentes, de los cuales quiere disponer 5 en el estante de su escritorio. ¿Cuántas disposiciones son posibles?

Una fórmula general para las permutaciones

Supón que tenemos un conjunto de siete banderas, cada una de diferente color. ¿Cuántas señales diferentes podemos hacer con 3 banderas, izadas verticalmente en un mismo mástil?

Una señal significa, pues, una disposición de 3 de las 7 banderas o, como hemos dicho, una permutación de 7 objetos, tomados 3 a la vez. Como recordarás, hemos empleado el símbolo $P_{7,3}$. La primera bandera puede elegirse tomando una cualquiera de entre las 7 posibles. Cuando se ha hecho esto, quedan 6 posibilidades para la segunda bandera. Después de haber tomado ambas, quedan 5 maneras de elegir la tercera bandera. Por la propiedad multiplicativa, el número total de permutaciones es

$\boxed{7}$
$\boxed{6}$
$\boxed{5}$

$7 \cdot 6 \cdot 5$ ó

$$P_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5$$

Esta manera de pensar nos permite escribir una fórmula general para el número de permutaciones de n objetos, tomados r a la vez. Hay n posibilidades para la primera elección; luego, como quedan $(n - 1)$ objetos, hay $(n - 1)$ posibilidades para la segunda elección, $(n - 2)$ para la tercera, y así sucesivamente. Debe haber r etapas en este procedimiento, una para cada uno de los objetos que se usan en la permutación. Por consiguiente, habrá r factores en el producto final. De acuerdo con esto,

$P_{n,r} = n(n - 1)(n - 2)\ldots$ hasta r factores, donde $r \leq n$.

Como ilustración, vemos que

$$P_{7,5} = \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}_{5 \text{ factores}}, \quad \text{cuando } n = 7, \quad r = 5$$

$$\text{y} \quad P_{24,3} = \underbrace{24 \cdot 23 \cdot 22}_{3 \text{ factores}}, \quad \text{cuando } n = 24, \quad r = 3.$$

Ejercicios 7-2e

1. Escribe el producto $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43$ usando la forma $P_{n,r}$.
2. (a) Escribe el número $P_{12,3}$ en forma factorizada (pero no efectúes las multiplicaciones).
   (b) Escribe el producto de $P_{12,3}$ y $9!$ en forma desarrollada (pero no efectúes las multiplicaciones).
   (c) ¿Es $P_{12,3} \cdot (9!) = P_{12,12}$? ¿Por qué?
3. Expresa $P_{12,3}$ como cociente de dos números, cada uno de los cuales sea una factorial. (Sugerencia: Consulta el problema 2(c).)
4. (a) Escribe el número $P_{20,4}$ en forma de producto (pero no multipliques).
   (b) Escribe el producto de $P_{20,4}$ y $16!$ en forma de producto (pero no multipliques).
   (c) ¿Qué nombre conveniente tendremos para el producto en (b)?
5. Expresa $P_{20,4}$ como cociente de dos números, siendo cada uno de ellos una factorial.
6. Los problemas 2, 3, 4 y 5 te sugieren una manera de expresar $P_{n,r}$ en términos de factoriales. Escribe $P_{n,r}$ como un producto, al igual que en el párrafo que precede a estos ejercicios.
   (a) ¿Por qué factorial debes multiplicar $P_{n,r}$ para obtener $(n!)$?
   (b) Expresa $P_{n,r}$ como cociente de dos números, siendo cada uno de ellos una factorial.
7. Un mono toma una máquina de escribir y, oprimiendo 5 diferentes teclas sucesivamente, escribe una "palabra simiesca" de cinco letras.
   (a) ¿Cuántas posibles "palabras simiescas" de cinco letras hay?
   (b) ¿Cuántas diferentes "palabras simiescas" de 26 letras cada una serían posibles? (Deja tu respuesta en forma de producto.)

*(c) ¿Cuántos días necesitaría el mono para escribir una lista completa de "palabras simiescas" de 5 letras, si pudiera escribirlas a razón de una palabra por segundo? (¡Supón que el mono es un mecanógrafo ideal que no comete errores ni se detiene a comer bananas mientras trabaja!)

8. Un marcador telefónico tiene una perforación circular para cada uno de los diez dígitos.

   (a) ¿Cuántos números telefónicos de cinco dígitos son posibles, si no se repite ningún dígito?

   (b) ¿Cuántos números telefónicos de cinco dígitos son posibles?

9. Cinco jugadores de un equipo de fútbol pueden jugar como extremos izquierda o como extremos derecha. ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse los cinco jugadores como extremos izquierda o derecha?

*10. Supón que queremos enviar mensajes en código. Vamos a usar ciertos símbolos cuyo número es n. (Los símbolos pueden ser letras, banderas, sonidos, dibujos o símbolos de cualquier clase.) Cada mensaje se compone de cuatro símbolos diferentes, dispuestos ordenadamente. El número de posibles mensajes que queremos enviar es 1,600. ¿Cuál es el número mínimo n de símbolos que necesitamos para lograr nuestro propósito?

7-3. Combinaciones

Cada vez que hemos usado la palabra "permutación", ha sido para referirnos, no solamente a los elementos, sino también a la disposición u ordenación de sus elementos. Al comienzo de este capítulo hemos tratado los comités de un club. En un comité como los que hemos estudiado entonces, los miembros no están dispuestos de ninguna manera particular. La elección de un comité entre los miembros de un club es una ilustración de una combinación.

Definición. Una combinación de cierto conjunto de n objetos, tomados r a la vez, es un conjunto de r elementos del conjunto total de n objetos sin tener en cuenta el orden para elegirlos.

En esta definición, n es un número natural y r es un número cardinal no mayor que n. El número de combinaciones de un conjunto de n objetos, tomados r a la vez, se representa frecuentemente por el símbolo $\binom{n}{r}$. En este libro, debes leer dicho símbolo diciendo: "El número de combinaciones de n objetos, tomados r a la vez".

En el lenguaje de los conjuntos, decimos que $\binom{n}{r}$ es "el número de subconjuntos de orden r de un conjunto de n elementos". Un subconjunto de orden r es un conjunto de r elementos, cada uno de los cuales es uno de esos n elementos.

Los números que aparecen en el triángulo de Pascal son valores de $\binom{n}{r}$. Por ejemplo, para la quinta fila del triángulo de Pascal hallamos, leyendo de izquierda a derecha, que

$$\binom{5}{0} = 1, \quad \binom{5}{1} = 5, \quad \binom{5}{2} = 10, \quad \binom{5}{3} = 10,$$

y así sucesivamente.

Probablemente observas que el nuevo símbolo que hemos introducido puede distinguirse fácilmente del símbolo de fracciones, pues el nuevo símbolo no tiene una barra entre los dos números, y los paréntesis se consideran siempre como parte del símbolo.

Nota: Otros símbolos comunes para representar el número de combinaciones de n objetos, tomados r a la vez, son $C_{n,r}$ y ${}_nC_r$. Es posible que quieras familiarizarte con estos símbolos, aunque se preferirá $\binom{n}{r}$.

Ejercicios 7-3a

1. Escribe el símbolo conveniente para cada una de las siguientes expresiones:
   (a) El número de combinaciones de 12 objetos tomados 7 a la vez.
   (b) El número de permutaciones de 12 objetos tomados 7 a la vez.
   (c) El número de combinaciones de m objetos tomados 3 a la vez.
   (d) El número de combinaciones de n + 2 objetos tomados k a la vez.

2. Enuncia verbalmente el significado de cada uno de los siguientes símbolos:

   $\binom{6}{2}$; $P_{8,4}$; $52!$; $\binom{52}{13}$; $P_{9,7}$; $\frac{8}{4}$.

3. Usa el triángulo de Pascal para hallar el valór de los siguientes:

   (a) $\binom{6}{2}$ y $\binom{6}{4}$

   (b) $\binom{7}{4}$ y $\binom{7}{3}$

   (c) $\binom{8}{3}$ y $\binom{8}{5}$

   (d) $\binom{3}{1}$ y $\binom{3}{2}$

   (e) $\binom{8}{2}$ y $\binom{8}{6}$

4. Sean a y b dos números naturales y S la suma de a y b. ¿Qué relación importante entre $\binom{S}{a}$ y $\binom{S}{b}$ se sugiere en el problema 3? (Toma algunas ideas de la Sección 7-1 para convencerte de que esta relación es verdadera en todos los casos.)

5. (a) Calcula lo siguiente:

   $\binom{4}{4}$, $\binom{6}{6}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{1,247}{1,247}$.

   (b) ¿Qué noción general ilustran esos ejemplos?

6. (a) Calcula lo siguiente:

   $\binom{4}{0}$, $\binom{6}{0}$, $\binom{7}{0}$, $\binom{249}{0}$.

   (b) ¿Qué noción general ilustran estos ejemplos?

7. Muestra que si n es un número natural diferente de uno, entonces $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Supón que un club de siete miembros elige tres funcionarios. Con la ayuda del triángulo de Pascal, hemos aprendido que el número de combinaciones posibles de tal comité ejecutivo es 35. A este número 35 podemos llamarlo ahora $\binom{7}{3}$. Por nuestro estudio de las permutaciones, sabemos que los tres cargos pueden aparearse con los tres funcionarios de $P_{3,3} = 3!$ maneras. Podemos aplicar la propiedad multiplicativa y ver que el número de

posibles asignaciones de cargos es $\binom{7}{3} \cdot P_{3,3}$. Lo primero que hay que hacer es elegir un grupo de 3 entre 7 miembros. Luego hay que distribuir esos 3 en los cargos.

Por otra parte, hemos aplicado la propiedad multiplicativa para obtener que el número de maneras como se pueden elegir los tres miembros para ocupar los cargos, de entre los siete miembros del club, es $7 \cdot 6 \cdot 5$, a saber, 210. Este número, 210, es $P_{7,3}$.

Ambos puntos de vista conducen al mismo resultado. Cada expresión representa el número total de distribuciones posibles de los cargos. Por consiguiente,

$$\binom{7}{3} \cdot P_{3,3} = P_{7,3} \quad \text{ó}$$

$$\binom{7}{3} \cdot 3! = P_{7,3}$$

Esta última ecuación nos da una manera de calcular $\binom{7}{3}$, el número de combinaciones de 7 objetos diferentes, tomados 3 a la vez. De la ecuación anterior podemos despejar

$$\binom{7}{3} = \frac{P_{7,3}}{3!}.$$

El mismo tipo de argumento muestra que para dos números naturales n y r, con $r \leq n$, podemos escribir

$$\binom{n}{r} \cdot P_{r,r} = P_{n,r}$$

$$\binom{n}{r} \cdot (r!) = P_{n,r}$$

Verbalmente, esta expresión $P_{n,r} = \binom{n}{r} \cdot P_{r,r}$ establece simplemente que

$$\left\{\begin{array}{l}\text{número de permu-}\\ \text{taciones de } n\\ \text{objetos diferen-}\\ \text{tes, tomados } r\\ \text{a la vez}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{número de combi-}\\ \text{naciones de } n\\ \text{objetos diferen-}\\ \text{tes, tomados } r\\ \text{a la vez}\end{array}\right\} \cdot \left\{\begin{array}{l}\text{número de permuta-}\\ \text{ciones de } r \text{ obje-}\\ \text{tos diferentes, to-}\\ \text{mados } r \text{ a la vez}\end{array}\right\}.$$

De esta ecuación general vemos que

$$\binom{n}{r} = \frac{P_{n,r}}{r!}$$

y como

$$P_{n,r} = n(n-1)\ldots \quad (\text{hasta } r \text{ factores})$$

obtenemos la fórmula

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots \text{ (hasta } r \text{ factores)}}{r!}$$

En esta fracción, el número de factores del numerador es r, que es el mismo número de factores del denominador. Por ejemplo, si $n = 11$ y $r = 5$ tenemos

$$\binom{11}{5} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Observa que hay $r = 5$ factores tanto en el numerador como en el denominador. El primer factor del numerador es $n = 11$; el primer factor del denominador es $r = 5$.

Ejercicios 7-3b

1. Hay diez hombres calificados para manejar una máquina que requiere tres operadores a la vez. ¿Cuántas dotaciones de tres son posibles?
2. Un programador de radiodifusión tiene 15 discos. Cada noche selecciona 5 discos para hacer un programa. ¿Cuántas noches puede hacer esto sin repetir un programa íntegro? No tengas en cuenta el orden en que se presentan los discos en el programa. (No es necesario que efectúes las multiplicaciones; puedes dejar tu respuesta en los símbolos que creas convenientes.)
3. Se dan ocho puntos en el espacio de manera que cuatro cualesquiera de ellos nunca están en el mismo plano. (Recuerda que tres puntos determinan un plano.) ¿Cuántos planos diferentes quedan determinados por los ocho puntos?
4. A lo largo de una línea de ferrocarril hay 12 estaciones. ¿Cuántas clases diferentes de boletos deben imprimirse de manera que los haya para viajes entre dos cualesquiera de las estaciones en los siguientes casos?
   (a) En que un mismo boleto valga en ambas direcciones.
   (b) En que haya boletos distintos para direcciones distintas.
5. Un restaurante ha preparado 4 clases de carnes, 3 clases de ensaladas y 5 clases de verduras. Cada fuente contiene una porción de carne, una de ensalada y una de verduras. ¿Cuántas clases diferentes de fuentes se pueden preparar?

6. Una señorita tiene cuatro faldas, seis blusas y tres pares de zapatos. ¿Durante cuántas semanas puede vestir conjuntos diferentes cada día?

7. En un juego de bridge, una mano consiste en 13 cartas tomadas de las 52 cartas del juego. El número posible de manos es 635,013,559,600. Escribe este número empleando un símbolo especial que hayas estudiado en este libro.

8. Un vendedor tiene clientes en ocho ciudades distintas de la ciudad en que vive. Quiere planear un viaje a fin de pasar sucesivamente por cada una de esas ocho ciudades y luego volver a su casa. ¿Cuántas rutas posibles hay?

*9. En una liga de béisbol hay ocho equipos. Durante la temporada, cada equipo ha jugado cinco veces con todos los demás. ¿Cuántos partidos han jugado en total los equipos de la liga durante esa temporada?

*10. Se han fundido o bien una o bien dos bombillas de luz del circuito de ocho bombillas en serie del árbol de Navidad. Supón que tienes dos bombillas buenas de repuesto y tratas de localizar otra (u otras) que se han fundido, reemplazando primero las bombillas de una en una y luego de dos en dos. ¿Cuántas pruebas podrás necesitar para localizar la bombilla (o las bombillas) fundidas?

*11. Un comerciante tiene seis billetes, uno de cada uno de los siguientes valores: $1, $5, $10, $20, $50 y $100. ¿Cuántas diferentes sumas de dinero pueden formarse empleando conjuntamente uno o más de sus billetes?

7-4. Repaso de permutaciones y combinaciones

En este capítulo hemos estudiado las maneras de contar todas las posibles disposiciones, o permutaciones, de un conjunto de elementos y de contar todos los posibles subconjuntos de un tamaño dado. Hemos llamado combinación a uno cualquiera de tales subconjuntos. Es importante que recuerdes los términos "permutaciones" y "combinaciones", y que comprendas los principios sobre los cuales se basan los métodos utilizados para contar los elementos. No es

tan importante en esta etapa de tus estudios de matemáticas que recuerdes las fórmulas particulares.

En los ejercicios de esta sección se pueden aplicar las ideas básicas referentes a permutaciones y combinaciones.

Ejercicios 7-4

1. ¿Cuántas palabras de seis letras (aunque no tengan sentido) pueden formarse con las letras de la palabra TEORIA?
2. Una chica compró dos faldas y tres chaquetas nuevas. ¿De cuántas maneras diferentes puede estrenar sus faldas y chaquetas nuevas?
3. Una clase escolar se reúne diez años después de su graduación, y concurren 96 personas. Si cada persona da la mano a todas las demás, ¿cuántos apretones de mano ocurrirán?
4. Una fábrica de automóviles tiene 3 carrocerías diferentes, 7 tapizados y 5 colores. Para mostrar todos los posibles modelos en una exhibición, ¿cuántos automóviles se necesitan?
5. Cinco indios caminan uno tras otro por el bosque. ¿En cuántos órdenes diferentes pueden colocarse?
6. ¿Cuántos comités diferentes de 5 personas se pueden formar con 14 personas?
7. Una patrulla de guardacostas tiene 8 banderas diferentes. ¿Cuántas señales distintas puede enviar izando 3 banderas a la vez?
8. La característica de cierta radioemisora comienza con W. ¿Cuántas características diferentes se pueden usar empleando sólo 3 letras? Se permite la repetición de letras.
9. ¿Cuántas placas de licencia para automóviles de 5 dígitos pueden hacerse si no se permite usar el 0 como primer dígito?
10. Un ama de casa desea colocar 5 libros en su escritorio. Tiene 8 libros para escoger. Los 8 libros tienen pastas de diferentes colores y son de distintos tamaños. ¿Se trata de un problema de permutaciones o de combinaciones? ¿De cuántas maneras diferentes puede disponer los cinco libros?
11. Un ama de casa desea leer 5 libros en las próximas dos semanas. Hay 8 libros para escoger. ¿Tiene que resolver un problema referente a permutaciones o a combinaciones? ¿Cuántos

conjuntos diferentes de cinco libros puede escoger para leer?

12. Tres puntos determinan un plano y 2 puntos determinan una recta. Si hay cinco puntos, tales que cuatro cualesquiera de ellos no están en un mismo plano y tres cualesquiera de ellos no están en una misma recta,

(a) ¿cuántos planos determinarán?

(b) ¿cuántas rectas determinarán?

Capítulo 8

PROBABILIDAD

8-1. Sucesos posibles

Este capítulo tratará de sucesos posibles. Por ejemplo, un meteorólogo predice las condiciones atmosféricas futuras. Su pronóstico de "lluvia" es, más exactamente, una afirmación probable: "Probablemente lloverá". En la misma forma, puedes predecir que "el equipo de las Camisas Verdes ganará el trofeo", pero en realidad lo que quieres decir es esto: "Es posible que el equipo de las Camisas Verdes gane el trofeo".

La probabilidad tiene muchas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, el gobierno federal y los gobiernos estatales usan la probabilidad para establecer los datos de los presupuestos; los expertos militares la emplean para tomar decisiones sobre las tácticas defensivas; los científicos la aplican al estudio y a la investigación; los ingenieros se valen de la probabilidad para proyectar y construir máquinas eficaces, aeroplanos y satélites; las compañías comerciales la emplean en sus estudios matemáticos que ayudan a tomar decisiones difíciles; las compañías de seguros la aplican al establecer las tablas de duración de vida.

Ahora encontrarás algunos ejemplos tomados de los juegos de azar, que te ayudarán a comprender lo que significa la probabilidad y cómo debe usársela. Tales juegos nos proporcionan modelos matemáticos excelentes para el estudio de la probabilidad. Los ejemplos no se presentan con la idea de fomentar el juego. Por el contrario, la información de este capítulo te debe ayudar a comprender por qué la mayor parte de los jugadores acaban perdiendo.

En esta sección estudiaremos algunas ideas sobre enunciados referentes a sucesos, tales como "Los universitarios ganarán", o "Canelo ganará la carrera", o "Si tiro una moneda hacia arriba y la dejo que caiga libremente, aparecerá cara". Tendremos que referirnos a una "medida de la posibilidad" de que cierto suceso ocurra. Esta "medida de la posibilidad" se llama también la probabilidad de que ocurra el suceso. Primero utilizaremos un modelo

matemático en el que podamos contar los casos que puedan ocurrir. Se puede usar como modelo el juego de tirar una moneda. Si tiramos una moneda hacia arriba y la dejamos caer libremente, quedará a la vista la cara o el revés de la cara, que se suele llamar cruz. Supongamos que la moneda está perfectamente equilibrada de tal modo que ninguno de sus lados pesa más que el otro. Tal moneda perfectamente equilibrada podría llamarse moneda "honesta" (admisible).

Considera esta pregunta: "¿Cuál es una medida de la posibilidad de que, si tiramos una moneda y la dejamos caer libremente, aparezca cara?"

En la probabilidad se acostumbra usar un número para indicar la medida de la posibilidad que un suceso tiene de ocurrir. Si lanzamos una moneda, tenemos dos posibles resultados: (1) la cara, (2) la cruz. Que la moneda caiga con cara hacia arriba es un resultado favorable de dos resultados posibles. Decimos que la medida de la posibilidad de que la moneda caiga con cara hacia arriba es $\frac{1}{2}$.

Si una colección de sucesos está regido por las leyes del azar, entonces hay cierta probabilidad de que ocurra. Si usamos la letra A para representar el suceso de que una moneda muestre una cara, entonces decimos que $\frac{1}{2}$ es la <u>probabilidad del suceso</u> A. Esto equivale a decir que la medida de la posibilidad de que ese suceso ocurra es $\frac{1}{2}$. Podemos representar la probabilidad del suceso A como

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

Si representamos con la letra B el suceso de que la moneda muestre cruz, podemos referirnos a la probabilidad de B. Esta probabilidad se puede representar con el símbolo $P(B)$. Entonces,

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

Es importante comprender que en el caso anterior $P(A) = P(B)$. Es decir, ambos sucesos son igualmente posibles. Dos enunciados cualesquiera que predicen sucesos que son igualmente posibles tienen la misma probabilidad.

Supón que hemos tirado una moneda "honesta" cinco veces y que cada vez ha presentado cara. ¿Cuál es la probabilidad de

que la moneda presente cruz en la siguiente tirada? Algunos piensan que la mala suerte va a cambiar, que la suerte actuará para forzar a la moneda a mostrar cruz hasta que se establezca un balance de caras y cruces. ¡No es así! La probabilidad de que una moneda muestre cara sigue siendo $\frac{1}{2}$ para cada tirada. En probabilidades no decimos que si una moneda muestra cara en la primera tirada, debe mostrar cruz en la segunda.

Supón que usas dos peniques. ¿Cuál es la medida de la posibilidad de que si se tiran dos peniques, aparezcan cara y cruz? Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra la aparición de cara y cruz? La tabla siguiente muestra que hay cuatro resultados posibles.

Resultados posibles

Primera moneda	Segunda moneda
cara	cara
cara	cruz
cruz	cara
cruz	cruz

Hay dos resultados en que aparecen cara y cruz. Dos resultados entre cuatro son favorables. La probabilidad de que el suceso ocurra es $\frac{2}{4}$ ó $\frac{1}{2}$. Si usamos la letra E para representar el suceso, podemos escribir

$$P(E) = \frac{1}{2}$$

¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan exactamente dos caras cuando se tiran dos monedas? No tiene importancia el que se tiren las dos monedas al mismo tiempo o una después de la otra. De los cuatro resultados, ¿cuántas maneras hay de que este suceso ocurra? Si usamos la letra G para representar el suceso de que aparezcan dos caras, podemos escribir la probabilidad del suceso G como

$$P(G) = \frac{1}{4}$$

Observa que en este ejemplo los sucesos E y G no son igualmente posibles. Sus probabilidades son diferentes.

Podemos escribir la fórmula

$$P(E) = \frac{t}{s}$$

donde $P(E)$ es la probabilidad de que ocurra un suceso E, t es el número de resultados posibles en los cuales E ocurre y s es el número total de resultados posibles. Si r es el número de resultados posibles en los cuales E no ocurre, entonces podemos decir

$$P(\text{no } E) = \frac{r}{s}$$

Como o bien E ocurre o bien E no ocurre, $t + r = s$, y

$$P(E) + P(\text{no } E) = \frac{t}{s} + \frac{r}{s} = \frac{t + r}{s} = \frac{s}{s} = 1$$

En la hipótesis de que un suceso E o bien ocurre o bien no ocurre, entonces

$$P(E) + P(\text{no } E) = 1$$

Si hay seguridad de que el suceso K ocurra, $P(K) = 1$. Si hay seguridad de que el suceso L no ocurra, $P(L) = 0$. Entonces, concluimos que para un suceso cualquiera M,

$$0 \leq P(M) \leq 1$$

Esta proposición numérica se lee así: "$P(M)$ es mayor o igual que cero y menor o igual que 1". ¿Por qué nunca es $P(M)$ mayor que 1?

Ejercicios 8-1a

1. En una caja hay dos bolitas negras y una blanca. Tienes que sacar una bolita sin mirar dentro de la caja. Determina la probabilidad de que saques una bolita negra.
2. Usando los datos del problema 1, halla P para el suceso de que sea blanca la bolita que sacas de la caja.
3. Supón que has tirado una moneda "honesta" nueve veces y cada vez has obtenido cara.
   (a) Considera lo anterior como un suceso. ¿Es probable que ocurra este suceso? Explica tu respuesta.
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda presente cruz en la décima tirada?
   (c) ¿Tiene el resultado de las 9 primeras tiradas algún efecto sobre el resultado de la décima tirada?

4. En una clase hay 25 estudiantes, de los cuales 10 son niñas y 15 son varones. La maestra ha escrito el nombre de cada alumno en una tarjeta distinta. Si se toma una tarjeta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el nombre escrito en la tarjeta sea
   (a) el nombre de un niño?
   (b) tu nombre (suponiendo que perteneces a esa clase)?
5. Imagina que una caja contiene 48 bolitas. Ocho de esas bolitas son negras y cuarenta son blancas. Halla P para el suceso de que si se saca una bolita al azar (sin mirar dentro de la caja), resulte una blanca.
6. Usando los datos del problema 5, considera este suceso: "Si se sacan al azar nueve bolitas de la caja, todas las bolitas serán negras".
   (a) ¿Es posible el resultado en este caso?
   (b) ¿Qué medida de su posibilidad podemos asignar a este resultado?
7. Tras larga experiencia, sabemos que nacen tantos niños como niñas. En media, la mitad de los bebés que nacen son niños y la otra mitad niñas. Entonces, en un nacimiento dado, la probabilidad de que el bebé sea niño es $\frac{1}{2}$. De igual modo, la probabilidad de que sea niña es $\frac{1}{2}$, pues ningún otro resultado es posible. (Excluimos por el momento las posibilidades de mellizos, trillizos y otros nacimientos múltiples.) Entonces, $P(\text{niño}) = \frac{1}{2}$ y $P(\text{niña}) = \frac{1}{2}$. Supongamos que esta medida de la posibilidad valga para una familia en particular tanto como vale en general.
   (a) Los esposos Pérez tienen ya un varoncito cuando esperan su segundo bebé. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un niño? ¿Y una niña? (Es importante recordar que cada nacimiento es un suceso independiente, no influido por los nacimientos anteriores. Convenimos en que el hecho de que los Pérez tengan ya un varón no afecta la probabilidad de que el segundo bebé sea varón o niña.)
   (b) Los esposos Martínez tienen ya ocho hijas cuando les llega el noveno bebé. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea una niña?

8. En un periódico lees: "Fulano tiene un 50 por ciento de posibilidades de ganar la elección".
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane?
   (b) Supón que una medida de su posibilidad es menor que $\frac{1}{2}$. ¿Qué significa esto en términos del resultado de un suceso? ¿Es muy posible o no que ocurra el resultado?
9. Si se elige un número cardinal del 1 al 30 (incluyendo a 1 y a 30), ¿cuál es la probabilidad de que tal número sea primo? Supón que la elección se hace de manera que no existe preferencia por ningún número en particular.
10. En un armario oscuro hay tres sombreros. Dos pertenecen al señor García y el otro a su amigo. Siendo el señor García una persona cortés, va al armario cuando su amigo está listo para partir con él, y toma dos sombreros al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que tome los dos sombreros que necesita, es decir, el de su amigo y uno de los suyos?
11. Supón que tienes cinco cartas: el diez, la sota, la reina, el rey y el as de corazones.
   (a) ¿Cuál es la posibilidad de que la primera carta que saques sea el as?
   (b) Supón que obtienes la sota en la primera sacada, y que la pones aparte. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda carta que saques sea el as?
   (c) ¿Son tus respuestas para (a) y (b) las mismas? ¿Por qué?
   (d) Después de sacar la sota y ponerla aparte, supón que la segunda carta que saques es el diez y que también la pones aparte. ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera carta que saques sea el as?
   (e) ¿Qué se puede afirmar sobre la medida de la posibilidad en las operaciones (a), (b) y (d) al decrecer el número de cartas?

En algunos de los problemas has determinado la medida de la posibilidad, que hemos llamado probabilidad, haciendo una lista de los posibles resultados. Esto es fácil cuando hay solamente una o dos monedas, pero a medida que el número de monedas crece,

es difícil recordar todas las posibilidades. Veamos si podemos descubrir una manera fácil y exacta de hacer esas listas.

La tabla para dos monedas muestra este modelo:

Resultados posibles

Primera moneda	Segunda moneda
C	C
C	R
R	C
R	R

(C representa cara y R representa cruz.)

Observa que la primera columna está formada por pares de las mismas letras: C, C, R, R. La segunda columna está formada por pares alternados: C, R, C, R. Compara el modelo de la tabla para dos monedas con el modelo de la tabla para tres monedas, que se presenta a continuación:

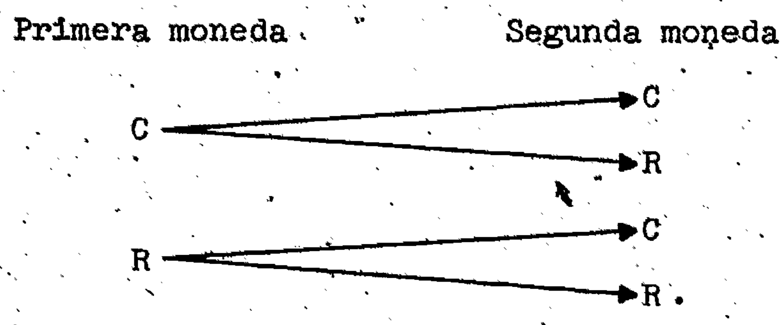
Resultados posibles

Primera moneda	Segunda moneda	Tercera moneda
C	C	C
C	C	R
C	R	C
C	R	R
R	C	C
R	C	R
R	R	C
R	R	R

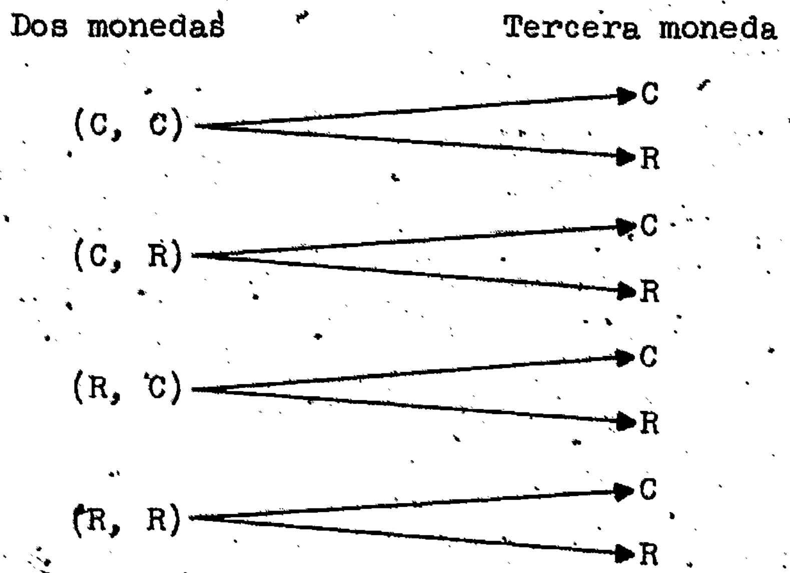
Observa cómo está formada cada columna: la primera por grupos de a cuatro; la segunda por grupos de a dos; la tercera alternadamente, C y R. Esta es una manera sistemática de hacer una lista de los posibles resultados para contar las posibilidades.

¿Cuántas posibilidades hay para una moneda? Sabes que sólo

hay dos, C o R. ¿Cuántas posibilidades hallaste cuando se tiraban dos monedas? Había el doble de posibilidades, porque para cada posibilidad en una moneda habían dos posibilidades en la otra. Esto se representa en el siguiente diagrama:



Si se agrega una tercera moneda, ¿debe duplicarse nuevamente el número de posibilidades? El siguiente diagrama puede ayudarte a decidirlo.



Para todo posible arreglo de dos monedas, hay dos posibilidades para la tercera. Entonces, el número de posibilidades para las tres monedas es igual a $2 \times$ (número de posibilidades para 2 monedas). En general debes comprender que cada vez que se toma una moneda más, el número de posibilidades se duplica. ¿Cuántas posibilidades habría si se tomaran cuatro monedas? Recuerda que había ocho posibilidades con 3 monedas.

En resumen:

Número de monedas	Número total de posibilidades
1	2
2	$2 \cdot 2 = 2^2 = 4$
3	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$
4	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
.	.
.	.
.	.
10	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 1,024$
.	.
.	.
.	.
n	$\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}^{n} = 2^n$

(Observa que cada número de la columna de la derecha es el doble del que está inmediatamente encima de él.)

Podemos expresar este resultado con una fórmula:

$$T = 2^n$$

T es el número total de posibilidades,
2 es el número de posibilidades con una moneda y
n es el número de monedas

*Probablemente quieras justificar la fórmula general de este tipo:

$$T = s^n$$

T es el número total de posibilidades,
s es el número de posibilidades de un objeto y
n es el número total de objetos utilizados.

Si las posibilidades para un objeto son A, B y C, ¿cuál sería el número de posibilidades para dos de esos objetos?

$$T = s^n$$

$$T = 3^2$$

$$T = 9$$

Hay nueve posibilidades para dos objetos, cada uno de los cuales tiene tres posibilidades.

Al construir tablas, como en los casos en que se tiran dos o tres monedas, se ha hecho una lista de todos los resultados posibles. La probabilidad se basa en los resultados que aparecen en la tabla. En las tablas que hemos visto, suponíamos que cada posibilidad separada, o resultado, tenía la misma posibilidad de ocurrir. Decimos que cada resultado es "igualmente posible".

En esta sección nos hemos referido a algunos sucesos simples regidos por las leyes del azar. Hemos asignado medidas de posibilidad, que hemos llamado probabilidades, para los resultados de esos sucesos. Los números que hemos usado para representar P eran números como un medio, dos tercios, un cuarto, etc. Si realmente tiramos un penique "honesto" una vez, no podemos predecir si presentará cara o cruz. Pero si tiramos un penique "honesto" un millón de veces, entonces es casi seguro que el número de caras estará entre 490,000 y 510,000. La razón del número de caras al número total de tiradas casi con seguridad estará entre $\frac{49}{100}$ y $\frac{51}{100}$. En este capítulo no podemos estudiar todas las matemáticas que se requieren para justificar estas conclusiones.

Debes tener bien presente que la probabilidad *no* es el tirar monedas o sacar cartas. La probabilidad es una parte de las matemáticas que ha resultado sumamente útil para describir las posibilidades en juegos, elecciones, experimentos científicos, negocios y actividades gubernamentales que no son completamente predecibles. En este capítulo estudiaremos algunos de los conceptos más elementales acerca de esta teoría matemática.

Ejercicios 8-1b

1. Si se tiran tres monedas "honestas", ¿cuál es la probabilidad de que aparezcan tres caras? Refiérete a la tabla de la sección anterior que muestra 8 posibilidades para 3 monedas.
2. Si se tiran tres monedas "honestas", ¿cuál es la probabilidad de que aparezcan dos caras y una cruz?
3. Sin hacer listas, determina el número de resultados posibles si se tiran cinco monedas.
4. Hay 35 ladrillos, de los cuales cinco son de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar un ladrillo al azar resulte ser uno de los de oro? ("Al azar" en este caso significa "sin mirar ni levantar".)
5. (a) Si se tira un penique, ¿cuál es la probabilidad de que aparezca cara?
   (b) ¿Qué número de caras es razonable esperar si se tira un penique 50 veces?
6. Una caja contiene cinco bolitas blancas, tres negras y dos rojas.
   (a) Si sacas una bolita al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una bolita blanca?
   (b) Supongamos que has sacado la primera vez una bolita blanca y que no la devuelves a la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que saques una bolita negra la segunda vez?
   (c) Suponiendo que has sacado una bolita blanca la primera vez y una bolita negra la segunda y que no las has devuelto a la caja, ¿cuál es la probabilidad de que saques una bolita roja la tercera vez?
7. Un cubo tiene sus caras marcadas con las letras A, B, C, D, E y F (una letra en cada cara).
   (a) Si se lanza el cubo, ¿cuántos posibles resultados hay? Consideraremos como resultado la cara que sale arriba en cada caso.
   (b) Si se lanzan dos cubos al mismo tiempo, ¿cuántos resultados hay?
   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca una B si se tira un cubo?

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan dos letras E si se lanzan dos cubos al mismo tiempo?

8. Un tetraedro regular es un sólido que tiene cuatro caras. En ella se han marcado las letras A, B, C y D.

(a) Si se lanza un tetraedro regular (o se tira al aire permitiendo que caiga libremente), ¿de cuántas maneras posibles puede detenerse (o caer)? Observa que en este caso consideraremos como resultado la cara sobre la cual el objeto se apoya, es decir, la cara de base marcada A, B, C o D.

(b) Halla la medida de la posibilidad para el siguiente enunciado: "Si se lanza el tetraedro, caerá sobre su cara A".

(c) ¿Cuántos posibles resultados habrá si se lanzan dos de esos tetraedros?

(d) ¿Cuántos posibles resultados habrá si se lanzan tres de esos tetraedros?

9. Observa la tabla modelo que utilizamos para contar el número de resultados tirando monedas. C representa cara y R cruz; (C, R) es cara y cruz en cualquier orden.

1 moneda		1(C)	1(R)	
2 monedas	1(C,C)	2(C,R)	1(R,R)	
3 monedas	1(C,C,C)	3(C,R,R)	3(R,C,C)	1(R,R,R)

Agrega las filas cuarta y quinta de esta tabla. ¿Por qué te hace recordar esto al triángulo de Pascal?

10. Usa el problema 9 para hallar la probabilidad de obtener dos caras y dos cruces si se tiran cuatro monedas.

11. Da las probabilidades de cada uno de los seis resultados posibles cuando se tiran cinco monedas. ¿Es uno su suma?

12. Si se tiran cinco monedas, ¿qué combinaciones de caras y cruces aparecerán más probablemente? ¿Por qué? (Sugerencia: Consulta el problema 9.)

*13. Cuando se tiran seis monedas, ¿cuál es la probabilidad de que una, y sólo una, presente cara?

8-2. Probabilidad empírica

Entre las más importantes aplicaciones de la probabilidad están aquellas en las que no podemos hacer listas de posibles [illegible]sultados. Por ejemplo, la tabla muestra un reducido número de pronósticos atmosféricos, solamente entre el 1º y el 10 de abril. Se indican también las condiciones atmosféricas reales en esas fechas.

Fecha	Pronóstico	Tiempo real	"Sí" indica que el suceso pronosticado ocurrió; "no" que no ocurrió.
1	lluvia	lluvia	sí
2	llovizna	soleado	no
3	nublado	nublado	sí
4	claro	claro	sí
5	lluvias ocasionales	caluroso y soleado	no
6	lluvias ocasionales	lluvias ocasionales	sí
7	viento y nublado	viento y nublado	sí
8	tormenta	tormenta	sí
9	claro	nublado y lluvioso	no
10	claro	claro	sí

Observa que los pronósticos 1, 3, 4, 6, 7, 8 y 10 fueron correctos. Hemos observado diez resultados. El suceso de un pronóstico correcto ha ocurrido siete veces. Basados en esta información podríamos decir que la probabilidad de que sean ciertos los pronósticos futuros es $\frac{7}{10}$. Esta es la mejor estimación que podemos hacer basándonos en la información dada. En este caso, como hemos observado un número tan pequeño de resultados, no sería correcto confiar en nuestra estimación de P. Si deseamos hacer una buena estimación de la probabilidad de que el pronóstico del tiempo sea exacto, deberíamos analizar muchísimos casos más. Comprenderás, por supuesto, que hay muchísimos otros factores que influyen en la exactitud de un pronóstico meteorológico. El ejemplo

que hemos dado aquí indica solamente el buen éxito de una oficina meteorológica particular en sus pronósticos; en este caso, sólo para unos pocos días.

El 15 de setiembre, un jugador A de una liga mayor tenía una media de bateo de 0.387 para la temporada, y el jugador B tenía una media para la temporada de 0.208. Basándonos en estas medias, podríamos pensar que A tiene mejores posibilidades que B de golpear la pelota la próxima vez que batee. Podríamos aun decir que una medida de la posibilidad (probabilidad) de que A golpee la pelota es 0.387 y que una medida de la posibilidad de que B golpee la pelota es 0.208.

Un físico no puede trazar el movimiento de una única molécula de oxígeno en una habitación, pero puede estimar la probabilidad de que una molécula de oxígeno choque contra una de las paredes de la habitación en el siguiente segundo. Para obtener tal conclusión se requiere comprender muchas más matemáticas que las que podemos estudiar en este capítulo.

En muchas actividades de la industria moderna lo probabilidad desempeña un papel muy importante. El control de la calidad y de la confiabilidad de un artículo manufacturado son consideraciones nuevas y muy importantes en las cuales se usa la probabilidad. Los problemas de confiabilidad pueden resultar muy complejos. Una idea básica de la confiabilidad, sin embargo, puede ilustrarse en la siguiente manera. Se fabrican muchos miles de artículos de cierto tipo; la compañía selecciona al azar 100 muestras de tales artículos y los somete a pruebas cuidadosas. En esas pruebas se halla que 98 de los artículos reúnen los requisitos y se comportan satisfactoriamente. Esto sugiere que $\frac{98}{100}$ es una medida de la confiabilidad del artículo. Se puede esperar que alrededor de 98% de todos los artículos manufacturados por este procedimiento sea satisfactorio. La probabilidad o una medida de la posibilidad de que un artículo fabricado por este procedimiento sea satisfactorio podría indicarse con 0.98.

Todos estos ejemplos de probabilidad empírica son diferentes de los ejemplos y problemas de la Sección 8-1 en un aspecto muy importante. En la Sección 8-1 podíamos hacer una lista y contar

todas las posibilidades excepto en el problema 7 de los Ejercicios 8-1a. En esta sección, no podemos, o no es práctico, tratar de hacerlo. En la primera sección sacábamos conclusiones contando lo que podríamos llamar la colección de todas las posibilidades. En esta sección sacamos conclusiones de lo que podría ocurrir en el futuro, a partir de la información que nos da una muestra. La selección y el tamaño de la muestra que debe usarse son problemas de estadística. En esta clase de aplicaciones la selección de la muestra es muy importante. Las teorías matemáticas de muestreo son demasiado avanzadas para considerarse aquí.

En los problemas de esta sección se te pide hallar medidas de la posibilidad, o probabilidades, a partir de datos observados. En cada caso los datos observados pueden ser considerados como una muestra de la población total, o una muestra de posibles resultados.

Ejercicios 8-2

1. Un maestro ha enseñado las matemáticas del octavo grado a 1,600 estudiantes durante los 10 últimos años. En este período ha calificado con A a 152 estudiantes.
   (a) Basándote en estos datos, ¿cuál es la medida de la posibilidad que tiene un estudiante, tomado al azar, de recibir una calificación A en la clase de este maestro?
   (b) Si este maestro enseñara matemáticas del octavo grado a 2,000 estudiantes durante los próximos doce años, ¿cuántas calificaciones A podrías esperar que ponga este maestro?
2. La media de bateo de un jugador de béisbol es 0.333. Utilizando esta información como medida de posibilidad, ¿cuál es la probabilidad de que este jugador golpee la pelota la próxima vez que batee?
3. Los archivos de una estación meteorológica muestran que en los últimos 120 días sus predicciones atmosféricas han sido correctas 89 veces. Usa esta información para establecer la probabilidad de que su predicción para mañana sea correcta.
4. Un fabricante de sacapuntas de lápices prueba cuidadosamente una muestra de 500 sacapuntas para ver si un lápiz de cierto tipo puede ser afilado sin romperle la punta. Durante la prueba, 489 de los sacapuntas ensayados funcionaron

satisfactoriamente. El lote de fabricación comprendía 20,000 sacapuntas.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un sacapuntas seleccionado al azar entre los restantes 19,500 sacapuntas funcione satisfactoriamente?

(b) Si tu escuela compra 40 de esos sacapuntas, ¿es de esperar que todos funcionen satisfactoriamente?

5. Las primas para los seguros de vehículos son más altas cuando el asegurado es varón menor de 25 años. Explica cómo, coleccionando datos sobre accidentes, las compañías de seguros han encontrado más conveniente aumentar las primas para los hombres jóvenes.

6. Las primas de seguros de vida y de anualidades de vida se basan en las tablas de mortalidad. Una tabla de mortalidad incluye datos estadísticos que se presume han sido recogidos entre 100,000 personas que estaban vivas a la edad de 10 años. A continuación se dan diez filas de las Tablas Actuariales de Mortalidad.

Edad	Número de sobrevivientes	Número de muertos durante el siguiente año	Edad	Número de sobrevivientes	Número de muertos durante el siguiente año
10	100,000	676	40	78,652	845
12	98,650	672	50	69,517	1,108
13	97,978	671	60	55,973	1,698
14	97,307	671	70	35,837	2,327
21	92,588	683	99	1	1

De acuerdo con la tabla, 676 de los 100,000 no estarán vivas a la edad de 11 años. 97,978 de las 100,000 personas originales estarán vivas a la edad de 13 años, pero 671 de esas personas, de acuerdo con la tabla, mueren en el curso de un año.

(a) ¿Cuántos viven hasta la edad de 50 años?
(b) ¿Cuántos viven hasta la edad de 100 años?
(c) El mejor conocimiento de la salud y de la medicina tendería a hacer que esa tabla resultase anticuada? ¿Por qué?

En los problemas 7 a 10, usa las Tablas Actuariales de Mortalidad dadas en el problema 6. Halla las respuestas correctas con una aproximación de 0.01.

7. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que tiene 13 años de edad esté viva a la edad de 21 años?

(Sugerencia: $P = \frac{92588}{97978}$)

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que tiene 13 años de edad esté viva a los 70 años de edad?

8. (a) ¿Qué año era hace 90 años?
(b) ¿Piensas que una tabla de mortalidad sería útil si se la construyese seleccionando actualmente 100,000 personas de 10 años de edad y con datos sobre las mismas para los próximos 90 años?
*(c) ¿Por qué método diferente del sugerido en (b) podría construirse esa tabla?

9. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño que tiene 10 años de edad viva hasta la edad de 99 años?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre que tiene 40 años de edad viva hasta la edad de 50 años?

10. Un tipo de póliza de seguro de vida garantiza el pago de \$1,000 a la esposa de un señor si éste muere dentro de un período de diez años. ¿Sería tal póliza más cara para un hombre de 40, 50 ó 60 años? ¿Por qué?

11. Considera los siguientes sucesos:

Suceso A. El viernes 13 llueve.
Suceso B. El viernes 13 sale el sol todo el día.

La siguiente tabla presenta las condiciones atmosféricas de veinte días viernes 13. Usando la información dada en la tabla, halla P para los sucesos A y B. Basándose en la

información de la tabla, ¿qué ocurre más probablemente en un gran número de viernes 13: A o B? Nota que es posible que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

Tiempo para veinte viernes 13

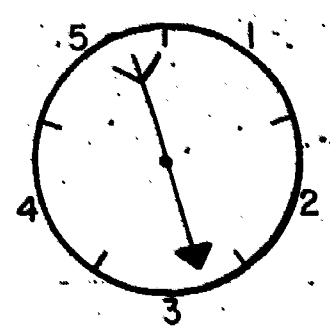
1.	Lluvia fuerte	11.	Nublado, sin lluvia
2.	Lluvia ligera	12.	Parcialmente nublado
3.	Soleado	13.	Nublado con llovizna
4.	Soleado	14.	Llovizna
5.	Soleado	15.	Soleado
6.	Lluvias ocasionales	16.	Soleado
7.	Llovizna	17.	Caluroso y soleado
8.	Soleado	18.	Soleado
9.	Soleado	19.	Nublado y llovizna
10.	Soleado	20.	Soleado

8-3. Probabilidad de A o B

En matemáticas tratamos de encontrar siempre un principio general que describa una determinada situación. En esta sección y en la próxima presentaremos dos de los más importantes principios generales de la probabilidad.

Considera el siguiente problema:

En este problema se usarán un marcador y un puntero, como se muestran en la figura. Después de girar, el puntero puede detenerse en las posiciones 1, 2, 3, 4 ó 5. ¿Cuál es la probabilidad de que el puntero se detenga en un número par?



En la figura el puntero está en el número 3. Diremos que el puntero está en 3 si se detiene entre las marcas dibujadas

a ambos lados de 3. A fin de que valgan todas las posibles paradas del puntero, diremos que el puntero está en 3 si se detiene sobre la marca que separa 3 y 4. En forma análoga, si se detiene sobre la marca que separa a 5 y 1 diremos que está en 5.

Hay cinco posibles resultados. El puntero se puede detener en 1, 2, 3, 4 ó 5. El suceso "el puntero se detiene en un número par", se realiza si el puntero se detiene en 2 ó 4; es decir, el suceso ocurre en dos de los cinco posibles resultados. Entonces la probabilidad de que el puntero se detenga en un número par es $\frac{2}{5}$.

El suceso de que el puntero se detenga en un número par es realmente una combinación de otros dos sucesos. Sea A el suceso de que el puntero se detenga en 2, y B el suceso de que el puntero se detenga en 4. Si usamos el símbolo "A o B" en representación de que el suceso A o el B ocurra, entonces "A o B" es el suceso de que el puntero se detenga en un número par. Hemos encontrado que

$$P(A \text{ o } B) = \frac{2}{5}$$

¿Podemos determinar esta probabilidad considerando separadamente los sucesos A y B? Sabemos que

$$P(A) = \frac{1}{5} \quad \text{¿Por qué?}$$

$$y \quad P(B) = \frac{1}{5} \quad \text{¿Por qué?}$$

Si sumamos $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{5}$, el resultado es $\frac{2}{5}$. ¿Cómo podemos obtener $P(A \text{ o } B)$ de $P(A)$ y $P(B)$?

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

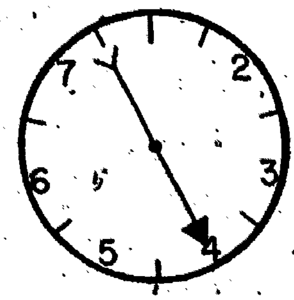
En este ejemplo, $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$.

Ciertamente, nuestra intuición nos dice que la probabilidad de que el puntero se detenga en 2 ó en 4 es mayor que la probabilidad de que el puntero se detenga en 2 y mayor que la probabilidad de que el puntero se detenga en 4. Muchas veces (como en el caso anterior) podemos sumar las probabilidades de sucesos separados para determinar la probabilidad de otro suceso. Observa que en el

caso anterior, el puntero no puede detenerse en 2 y en 4 al mismo tiempo (como resultado de una sola operación). Una vez tiene que detenerse en uno y otra vez en el otro. Los sucesos A y B no pueden ocurrir a la vez. Esta es una de las condiciones que se requieren para que se puedan sumar las probabilidades. Dos sucesos que no pueden ocurrir a la vez se llaman sucesos mutuamente exclusivos.

Consideremos otro ejemplo.

Los siete números están igualmente espaciados.



El puntero gira libremente. ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga en un número par?

Hay 7 posibles resultados. Tres de los 7 son resultados favorables. Los llamaremos A, B y C: A, el puntero se detiene en 2; B, el puntero se detiene en 4; C, el puntero se detiene en 6. El suceso cuya probabilidad buscamos es A o B o C. Los sucesos A, B y C se excluyen mutuamente, pues el puntero puede detenerse solamente en uno de esos números al final de cada operación.

Por consiguiente,

$$P(A \text{ o } B \text{ o } C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

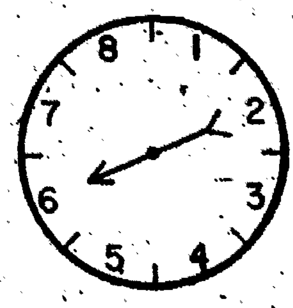
$P(A) = \frac{1}{7}$. ¿Por qué? También $P(B) = \frac{1}{7}$ y $P(C) = \frac{1}{7}$.

$$P(A \text{ o } B \text{ o } C) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

Observa que hemos llegado a las conclusiones, $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$ y $P(A \text{ o } B \text{ o } C) = P(A) + P(B) + P(C)$, de un único ejemplo cada una. Puedes verificar esas conclusiones resolviendo algunos de los problemas de los Ejercicios 8-3 mediante los dos métodos considerados en el ejemplo del principio de esta sección.

Ejercicios 8-3

1. En el marcador los números están igualmente espaciados.



¿Cuál es la probabilidad de que el puntero giratorio se detenga en un número impar?

2. (a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 6 ó un 1 si lanzamos un dado cuyas caras están numeradas de 1 a 6?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de no obtener un 6 ó un 1 si se lanza una vez un dado con caras numeradas de 1 a 6?

3. (a) ¿Cuál es la suma de las probabilidades del problema 2(a) y (b)? ¿Puedes interpretar esto como la probabilidad de que un suceso ocurra con certeza?

   (b) ¿Podrías usar la probabilidad obtenida en el problema 2(a) para resolver el problema 2(b)?

4. En una bolsa hay ocho bolitas blancas y dos rojas. Si se toma una bolita al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea roja?

5. Sea A un suceso cualquiera. Sea B el suceso "A no ocurre". Escribe una ecuación que relacione a $P(A)$ y $P(B)$.

6. En una bolsa hay cuatro bolitas rojas, tres blancas y dos azules. Si se toma una bolita al azar,

   (a) ¿cuál es la probabilidad de obtener una bolita roja?

   (b) ¿cuál es la probabilidad de obtener una bolita blanca?

   (c) ¿cuál es la probabilidad de obtener una bolita roja o una blanca?

7. En el barrio se realiza una exhibición de animales domésticos. Concursan diez perros, ocho gatos, tres canarios y seis conejos. De los dueños de los animales, se premiará a la persona cuyo nombre se saque de una urna.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el dueño de un perro o el de un gato gane el premio?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el dueño de un cuadrúpedo no gane ese premio?

8. Se llaman sucesos mutuamente exclusivos los que no pueden ocurrir a la vez. Si un suceso ocurre, el otro no puede ocurrir. Teniendo esto presente, ¿cuáles de los siguientes sucesos son mutuamente exclusivos?

(a) El suceso de obtener cara o cruz al tirar una moneda.

(b) El suceso de haber resuelto exactamente seis problemas en un examen o de haber resuelto exactamente ocho problemas en el examen.

(c) El suceso de lanzar un dado y obtener un número impar ó un número 3.

(d) El suceso de lanzar un dado y obtener un número 6 ó un número 3, si las caras del dado están numeradas de 1 a 6.

(e) El suceso de conducir el automóvil o ir de compras.

(f) El suceso de ir hacia arriba o de ir hacia abajo.

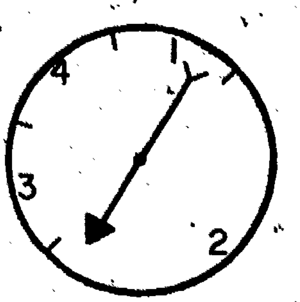
(g) El suceso de sacar un as o una sota de un paquete de cartas en una sola extracción.

(h) El suceso de correr o estar sentado.

(i) El suceso de hablar a tu maestro o de hablar a tu madre, si hablas a una sola persona.

(j) El suceso de guardar el automóvil o de partir con él.

9. El marcador se divide de manera que la mitad de la circunferencia corresponde a 2; 1, 3 y 4 están igualmente espaciados.



¿Cuál es la probabilidad de que el puntero giratorio se detenga en un número par?

10. En una bolsa hay cuatro tarjetas rojas y cinco tarjetas negras.

(a) ¿Cuántos pares diferentes de tarjetas hay en la bolsa? (Sugerencia: $\binom{9}{2}$.)

(b) ¿Cuántos pares diferentes de tarjetas rojas hay en la bolsa?

(c) ¿Cuántos pares diferentes de tarjetas negras hay en la bolsa?

(d) ¿Cuántos pares diferentes, formados por una tarjeta roja y una negra, hay en la bolsa?

(e) ¿Qué relación hay entre la suma de los números de pares de (b), (c) y (d), y el número de pares de (a)?

11. Determina la probabilidad de las siguientes extracciones de tarjetas de la bolsa del problema 10.

(a) Un par en el cual ambas tarjetas sean del mismo color.

(b) Un par que consista en una tarjeta roja y una negra.

12. Llama C al suceso de obtener cara por lo menos en una moneda cuando se tiran dos. Llama A al suceso de que salga cara en la primera moneda y B al suceso de que salga cara en la segunda moneda. Entonces

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ y } P(B) = \frac{1}{2}$$

(a) ¿Por qué es $P(C) = \frac{3}{4}$?

(b) ¿Pueden ocurrir los sucesos A y B a la vez?

(c) En este problema, ¿por qué es cierto que

$$P(A) + P(B) \neq P(C)?$$

8-4. Probabilidad de A y B

En la Sección 8-3 hemos hallado la probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B. Si es imposible que A y B ocurran a la vez (A y B son sucesos mutuamente exclusivos) la probabilidad de A o B es la suma de la probabilidad de A y la probabilidad de B. Simbólicamente, escribimos

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Ahora queremos hallar la probabilidad de que dados dos sucesos, ocurran ambos. ¿Cuál es la probabilidad de que si se tiran dos monedas, ambas sean caras? Los posibles resultados son: (C, C), (C,R), (R,C) y (R, R). Entonces, la probabilidad de que ambas monedas

presenten cara es $\frac{1}{4}$. Si llamamos suceso A al suceso de que una moneda salga cara, y B al suceso de que la otra moneda salga cara, entonces

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad y \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \ y \ B) = \frac{1}{4}. \quad \text{Observa que } \frac{1}{4} = (\tfrac{1}{2}) \cdot (\tfrac{1}{2}).$$

A y B es el suceso de que ambas monedas presenten cara. Para este ejemplo, vemos que P(A y B) = P(A) • P(B). Se debería observar que A y B son sucesos independientes. El que una moneda presente cara o cruz no afecta en modo alguno el resultado de la otra moneda.

Considera que tiramos una moneda y hacemos girar el puntero de un marcador con los números 1, 2, 3 y 4 igualmente espaciados. Si se tira la moneda, no importando qué lado de la moneda se presente, este resultado no afecta el resultado del puntero giratorio. Este es otro ejemplo de sucesos independientes. Si llamamos A al suceso de que aparezca una cara cuando tiramos una moneda y B al suceso de que el puntero se detenga en 4, entonces A y B son sucesos independientes.

Si queremos determinar la probabilidad de la aparición de una cara y de la detención del puntero en 4, estamos buscando la probabilidad de que ocurran dos sucesos. Si representamos por "A y B" al suceso de que "<u>ambos</u> A y B <u>ocurran</u>", entonces estamos buscando P(A y B).

Haciendo una lista de todas las posibilidades obtenemos lo siguiente:

C, 1	C, 4	R, 3
C, 2	R, 1	R, 4
C, 3	R, 2	

C, 1 significa que la moneda presenta cara y el puntero se detiene en el número uno. El suceso deseado es C, 4 que es uno de los posibles resultados. Entonces

$$P(A \ y \ B) = \frac{1}{8}$$

Podemos también resolver el problema hallando $P(A)$ y $P(B)$.

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{4}.$$

Observa que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, que es la probabilidad que hemos hallado para el suceso $(A \text{ y } B)$.

Otra manera de imaginar esto como producto es observar que de todos los resultados favorables para A, sólo uno de los posibles resultados para B (o $\frac{1}{4}$ de los posibles resultados para B) es favorable. Entonces, la probabilidad de A y B es $\frac{1}{4}$ de $P(A)$, y, por consiguiente, $P(A \text{ y } B) = \frac{1}{4} \cdot P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Veamos un ejemplo más:

Estás efectuando un examen que consiste en preguntas con varias opciones, en que hay 5 posibles respuestas para cada pregunta. Has respondido a todas las preguntas excepto la 7ª y la 9ª que son difíciles. Por eliminación, sabes que la respuesta correcta para la pregunta 7 es una entre 2 posibles, y la respuesta correcta para la pregunta 9 es una entre 3 posibles. Decides tratar de adivinar. Determina la probabilidad de obtener las respuestas correctas a las preguntas 7 y 9, suponiendo que tu respuesta a la pregunta 7 no afecta tu respuesta a la pregunta 9.

Sea A el suceso de elegir la respuesta correcta para la pregunta 7 y B el suceso de dar la respuesta correcta para la pregunta 9. Los sucesos A y B son independientes. ¿Por qué? Queremos saber cuánto es $P(A \text{ y } B)$. Por la propiedad observada en los dos ejemplos anteriores,

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$$

También sabemos que $P(A) = \frac{1}{2}$. ¿Por qué? ¿Qué significa "adivinar"? También, $P(B) = \frac{1}{3}$.

$$P(A \text{ y } B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

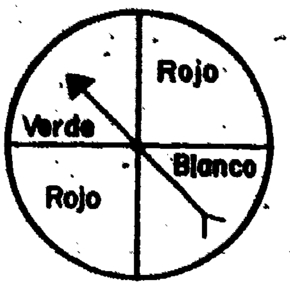
La probabilidad de responder correctamente a las preguntas 7 y 9, adivinando, es $\frac{1}{6}$.

Nuestra intuición nos dice que la probabilidad de que dos sucesos ocurran, $P(A \text{ y } B)$, es menor que la probabilidad de que uno u otro ocurra, $P(A \text{ o } B)$. Nuestra intuición también nos dice

que P(A y B) es menor que P(A) y que P(B). En esta afirmación se supone que ninguno de los sucesos puede tener una probabilidad igual a 1.

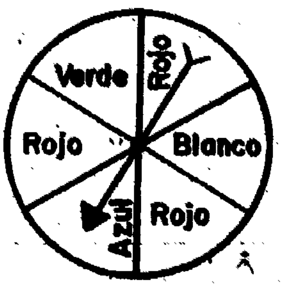
Ejercicios 8-4

1. Tiras una moneda dos veces sucesivamente. Sea A el suceso de que la moneda presente cruz en la primera tirada y B el suceso de que presente cara en la segunda tirada.
   (a) ¿Son los sucesos A y B independientes? Explica tu respuesta.
   (b) Determina la probabilidad de que la moneda presente cara en ambas tiradas.
2. (a) Si A, B y C son sucesos independientes, entonces P(A y B y C) = P(A) × P(B) × P(C). Establece una propiedad análoga que valga para cuatro sucesos independientes.
   (b) Determina la probabilidad de la aparición de una cara en cada una de las nueve tiradas sucesivas de una moneda.
3. Tu equipo de baloncesto va a jugar con el equipo A y con el equipo B en dos fechas sucesivas. Se estima que la probabilidad de que le gane al equipo A es $\frac{1}{2}$ y la de que le gane al equipo B es $\frac{2}{5}$.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que tu equipo gane ambos partidos?
   (b) Si tu equipo gana el primer partido, ¿cuál es la probabilidad de que gane el segundo?
4.



Las cuatro secciones son iguales.

Marcador A



Las seis secciones son iguales.

Marcador B

Se hacen girar los dos punteros. Supón que ambos son "honestos".

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos punteros se detengan en rojo? ____

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos punteros se detengan en verde?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que A se detenga en blanco y B en azul?

5. Si tienes una bolsa con cinco bolitas negras y cuatro blancas, ¿cuál es la probabilidad de sacar dos bolitas blancas de la bolsa si se saca primero una y se la devuelve a la bolsa antes de sacar la segunda?

6. En el problema 5, ¿cuál es la probabilidad de sacar dos bolitas blancas si la primera bolita no se devuelve a la bolsa antes de sacar la segunda?

7. (a) ¿Son independientes los sucesos del problema 5?

   (b) ¿Son independientes los sucesos del problema 6?

8. Supón que la probabilidad de que la familia Díaz tenga un varón es $\frac{1}{2}$, y la de que tenga una niña es $\frac{1}{2}$.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros hijos de los esposos Díaz sean un varón y una niña?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que los Díaz tengan primero un varón y luego una niña?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que tengan primero una niña y luego un varón?

   (d) Si los Díaz tienen un tercer hijo, ¿cuál es la probabilidad que no sea niña?

9. ¿Cuáles de los siguientes pares de sucesos son independientes?

   (a) Sacar una bolita negra cada una de las dos veces que se saca una bolita de una bolsa que contiene bolitas negras y blancas, si no devuelves la primera bolita antes de sacar la segunda.

   (b) Sacar una bolita negra cada una de las dos veces que sacas una bolita de una bolsa que contiene bolitas negras y blancas, si devuelves la primera bolita antes de sacar la segunda.

   (c) Ir a la escuela y llegar a ser abogado.

   (d) Obtener 3 en un dado con caras numeradas y obtener cara tirando una moneda.

(e) El suceso de que un día esté soleado y el suceso de que el siguiente día esté parcialmente nublado.

10. ~~Tenemos que~~ resolver cierto problema. La probabilidad de que una persona resuelva el problema es $\frac{2}{3}$. La probabilidad de que otra persona resuelva el problema es $\frac{5}{12}$.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el problema no sea resuelto si ambas personas trabajan independientemente en su solución?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el problema sea resuelto?

11. Si se debe escoger un comité de 3 personas entre los 20 alumnos de una clase y se puede escoger cualquiera de los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que tú y tus dos mejores amigos sean escogidos?

12. Cuando se tiran seis monedas, ¿cuál es la probabilidad de que se obtenga por lo menos una cara?

13. Hace unos cien años un monje llamado Mendel hizo varios experimentos cultivando plantas, especialmente guisantes. Los resultados de esos experimentos fueron tan importantes que nuestros modernos conocimientos de la herencia se basan en sus investigaciones.

Sabemos ahora que las características hereditarias están controladas por genes, y que éstos están colocados en los cromosomas. Así como una persona tiene dos cromosomas de una especie particular, como A, tiene también dos genes para un rasgo particular. Esos genes no tienen por qué ser exactamente iguales. Pueden contener dos aspectos diferentes del mismo rasgo; por ejemplo, ojos pardos y ojos azules, o cabello rizado y cabello lacio.

Es importante saber que un padre puede transmitir a un hijo solamente un gene de los dos que tiene de una especie particular. Cada niño recibirá de su madre uno de los dos posibles genes correspondientes a un rasgo, y de su padre, uno de los dos posibles genes para el mismo rasgo. La probabilidad de obtener uno cualquiera de los dos genes de uno de los padres es $\frac{1}{2}$.

Lo que pueda resultar al azar, de esos genes, afectará

al rasgo correspondiente en el niño. En los claveles, por ejemplo, se producen flores rojas cuando una planta tiene dos genes R, (RR), y se producen flores blancas cuando una planta tiene dos genes r, (rr). Pero, si la planta tiene un gene R y un gene r, entonces las flores son rosadas.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las plantas de flores rojas produzcan genes R?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que las plantas de flores blancas produzcan genes R?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener flores rojas cuando se cruzan plantas de flores rosadas con otras plantas de flores rosadas?

(d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener flores rojas cuando se cruzan plantas de flores rojas con plantas de flores rosadas?

*14. Se tienen diez varillas. Una tiene 1 pulgada de longitud, otra 2 pulgadas de longitud, y así sucesivamente, hasta 10 pulgadas de longitud. Una persona toma al azar tres de esas varillas. ¿Cuál es la probabilidad de que se pueda formar un triángulo con ellas? Recuerda que la suma de las longitudes de dos de los lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

*15. Dentro de un sombrero se ponen diez trozos de papel numerados del 1 al 10, mezclándolos bien. Una persona con los ojos cubiertos saca dos trozos de papel. ¿Cuál es la probabilidad

(a) de que los números de ambos papeles sean pares?

(b) de que la suma de los dos números sea par?

(c) de que la suma de los dos números sea divisible por 3?

(d) de que la suma de los dos números sea menor que 20?

(e) de que la suma de los dos números sea mayor que 20?

16. PROBLEMA DIFICIL.

(a) Se tiran un penique, una moneda de cinco centavos, una moneda de diez centavos y un cuarto de dólar, y se obtienen exactamente dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que una de esas dos caras que resultan sea la de la moneda de diez centavos?

(b) Si se tiran las mismas cuatro monedas y exactamente tres resultan caras, ¿cuál es la probabilidad de que una de las tres sea la moneda de diez centavos?

17. PROBLEMA DIFICIL. Se tiran cinco monedas diferentes, las del problema 16 y un medio dólar además. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos?

(a) Si salen exactamente tres caras, una es una moneda de diez centavos y una es un cuarto de dólar.

(b) Si resultan exactamente dos caras, una es una moneda de diez centavos.

(c) Que resulten exactamente dos caras y que una de ellas sea de la moneda de diez centavos.

(d) Que resulten exactamente tres caras y que dos de ellas sean una moneda de diez centavos y un cuarto de dólar.

8-5. Resumen

En este capítulo has estudiado algunas ideas elementales de la probabilidad, has resuelto algunos problemas con aplicaciones de estas ideas, y has utilizado la notación de las probabilidades, tal como $P(A)$. Has observado que, por definición,

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$P(A)$ es la probabilidad, o medida de la posibilidad, de que el suceso A ocurra.

Se han considerado dos tipos de situaciones a las que se pueden aplicar las probabilidades. En una, puedes hacer una lista y contar todos los posibles resultados. En la otra, no te es posible hacerlo, o no lo haces porque resultaría un trabajo tedioso. En esta situación, escoges una muestra de los datos y te basas más en los cálculos sobre la muestra que en los referentes al total.

También has resuelto problemas que ilustran lo siguiente:

(1) $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$, donde $P(A \text{ o } B)$ es la probabilidad de que un suceso A o un suceso B ocurra, supuesto que A y B no pueden

ocurrir a la vez. (A y B son mutuamente exclusivos.)

(2) P(A y B) = P(A) · P(B), donde P(A y B) es la probabilidad de que ocurran ambos, el suceso A y el suceso B, suponiendo que el éxito o el fracaso de A no afecta en forma alguna al suceso B. (A y B son independientes.)

Ejercicios 8-5

1. Los numerales para los números del 1 al 16 se escriben en 16 fichas. Si se toma al azar una de las fichas, ¿cuál es la probabilidad de que el número escrito sea
   (a) divisible por 4?
   (b) divisible por 3?
   (c) un número primo?
   (d) un número de dos dígitos?
   (e) divisible por 4 y por 3?
2. Una caja de lápices contiene 5 lápices duros y 12 blandos. Si sacas un lápiz, ¿cuál es la probabilidad de que sea
   (a) blando?
   (b) duro?
   (c) duro o blando?
3. Cuando se da una señal, cinco niños tiran al aire un penique cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que todas las monedas presenten cara?
4. Se extrae una carta de un mazo de 52 cartas.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un diamante?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea un as?
   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea el as de diamantes?
   (d) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea un diamante o una espada?
5. Un señor obsequia con un juego de bloques a su hijo de dos años. Cada bloque tiene la misma letra del alfabeto en cada una de sus caras. El padre selecciona los bloques necesarios para formar el nombre del niño, "A L B E R T O", y se los

entrega a éste, quien aún no sabe distinguir una letra de otra. Después de jugar un rato con los siete bloques el niño los dispone en línea. ¿Cuál es la probabilidad de que esta disposición forme su nombre?

6. Una bolsa contiene 4 veces más bolitas rojas que bolitas negras (idénticas salvo el calor). Si se saca una bolita, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?
7. Si hay dos bolitas negras y una blanca en una caja, podemos decir que hay tres pares posibles de bolitas en la caja. Determina la probabilidad de que, sacando al azar un par de bolitas,
   (a) ambas sean negras.
   (b) una sea negra y la otra blanca.
8. Halla la suma de las probabilidades en el problema 7(a) y (b). Explica el significado de la suma.
9. Se te va a colocar en fila con dos niñas (o niños) uno de los cuales es tu mejor amigo. Si la fila contiene exactamente tres personas incluyéndote a ti, ¿cuál es la probabilidad de que estés colocado junto a tu amigo? En este problema supondremos que no te has colocado intencionalmente en ningún sitio particular. Si te colocas junto a tu amigo, ya el azar no intervendría.
10. En la Escuela Secundaria de San Carlos los estudiantes han sido divididos en secciones, alfabéticamente. En la sección D, los números de estudiantes contados por las iniciales de sus apellidos son así:

    K - 5, L - 4, M - 8, N - 4, O - 2, P - 5 y Q - 1.

    (a) Determina la probabilidad de que un estudiante elegido al azar tenga un apellido que comience con K o con L.
    (b) Determina la probabilidad de que un estudiante elegido al azar tenga un apellido que comience con O, P o Q.
    (c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no tenga un apellido con inicial M o N?
11. Basándose en los registros de la temporada, el 1º de setiembre, la media de bateo de A es 0.313, la de B es 0.260, y la de C es 0.300. Si A, B y C batean en este orden,

¿cuál es la probabilidad de que los tres golpeen la pelota? (Redondea tu respuesta con la aproximación de una milésima.)

12. Basándose en los datos existentes, los biólogos consideran que la probabilidad de que nazca un varón es $\frac{1}{2}$, y de que nazca una niña es $\frac{1}{2}$. En el nacimiento de tres niños,
   (a) ¿cuál es la probabilidad de que todos sean varones?
   *(b) ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos dos sean varones?

13. Imagina un dodecaedro regular (sólido que tiene doce caras planas) en el que 5 caras han sido pintadas de blanco y 7 de negro. Si lanzas este sólido, ¿cuál es la probabilidad de que caiga con una cara blanca hacia abajo, es decir, apoyando en cara blanca?

14. Si en una caja hay 225 bolitas blancas y 500 bolitas negras, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bolita negra en la primera extracción?

15. El lunes los "Panteras" juegan contra los "Osos" y el martes los "Panteras" juegan contra los "Nacionales". Basándose en los resultados de la temporada, se dice que la probabilidad de que los "Panteras" ganen a los "Osos" es 0.4, y la probabilidad de que los "Panteras" ganen a los "Nacionales" es 0.6. Supón que los resultados del primer partido no producen ningún efecto sobre los resultados del segundo partido.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que los "Panteras" ganen ambos partidos?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que los "Panteras" pierdan ambos partidos?
   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que los "Panteras" ganen el partido con los "Osos" y pierdan el partido con los "Nacionales"?
   (d) ¿Cuál es el otro resultado posible al jugar ambos partidos? ¿Cuál es la probabilidad de este suceso?

*16. Un cubo cuyas caras están numeradas de 1 a 6 y una moneda se tiran al mismo tiempo.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener a la vez cara y 6?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara o un 5?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara o un número divisible por 2?

*17. Supón que tienes seis cartas para entregar en diversos sitios de la ciudad. Se ofrecen dos niños para entregarlas. ¿De cuántas maneras diferentes puedes distribuir las cartas entre los niños? Incluye las posibilidades de que un niño reciba 0, 1 y 2 cartas para distribuir, así como la posibilidad de que cada niño reciba 3 cartas.

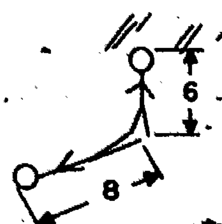
Capítulo 9

TRIANGULOS SEMEJANTES Y VARIACION

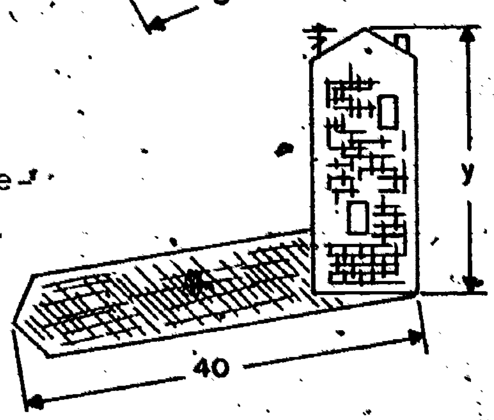
9-1. Mediciones indirectas y razones

Has leído en el Capítulo 3 que la distancia de la tierra al sol es de 93,000,000 de millas, y que la distancia de la tierra a la estrella más próxima (distinta del sol) es 4 años de luz. Probablemente sabes que el diámetro de la tierra es de unas 8,000 millas. ¿Te imaginas que alguien ha efectuado la medida de la distancia de la tierra al sol utilizando una cinta de medir, o ha perforado un agujero que pase por el centro de la tierra para medir su diámetro? Naturalmente que no. Esas distancias se han medido indirectamente. Medimos ciertas longitudes y ángulos que están a nuestro alcance. Luego calculamos las longitudes que nos interesan. A fin de hacer esto, podemos usar las relaciones que hay entre los elementos de un triángulo.

Podemos usar también mediciones indirectas en problemas más cercanos a nuestra experiencia diaria. Supón que un día de sol queremos calcular la altura de un edificio. Podemos medir la longitud de su sombra, que resulta ser 40 pies. Luego solicitamos la ayuda de un amigo que tiene una estatura de 6 pies. Encontramos que la longitud de su sombra es 8 pies. Entonces, su estatura es seis octavos, o tres cuartos, de la longitud de su sombra. Podemos escribir esto así:



$$\frac{\text{su estatura}}{\text{longitud de su sombra}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$



Parecería que la razón de la altura del edificio a la longitud de la sombra del mismo sería también $\frac{3}{4}$. Entonces obtenemos la siguiente proporción:

$$\frac{y}{40} = \frac{3}{4}$$

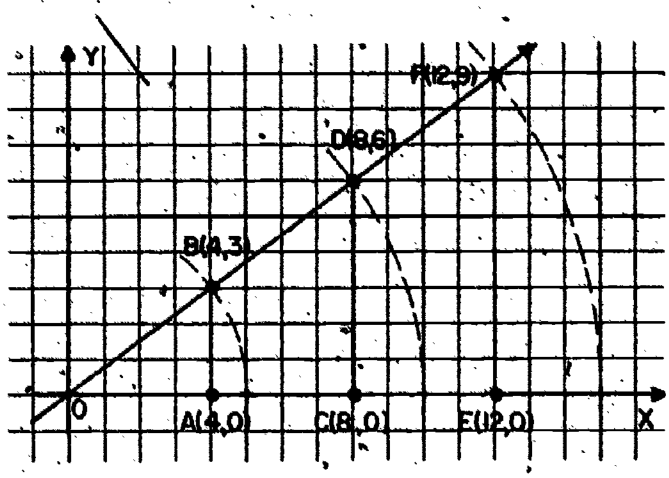
Usando la propiedad multiplicativa de la igualdad,

$$40(\frac{y}{40}) = 40(\frac{3}{4})$$

entonces, $y = 30$. La altura del edificio es 30 pies.

Ejercicios de clase 9-1a

En la siguiente figura, el par ordenado (4, 0) se designa con la letra A, (4, 3) se designa con B, y así sucesivamente. $\overrightarrow{OB}$ pasa por los puntos D y F. La longitud de un lado de uno de los cuadrados pequeños representará una unidad de longitud. Usa la figura para responder a las preguntas que se indican.



1. AB es 3, y OA es 4. (Recuerda que AB sin ningún símbolo encima significa "la medida del segmento $\overline{AB}$".) Por consiguiente, la razón de AB a OA es $\frac{AB}{OA} = \frac{3}{4}$.
   (a) ¿Cuál es la razón de CD a OC?
   (b) ¿Cuál es la razón de EF a OE?
2. Las líneas curvas de trazos que pasan por los puntos B, D y F han sido dibujadas con un compás. Entonces podemos decir que OB es 5, OD es 10, y así sucesivamente.
   (a) ¿Cuál es la razón de AB a OB?
   (b) ¿Cuál es la razón de CD a OD?
3. (a) Halla el valor de $\frac{OA}{OB}$.
   (b) Halla $\frac{OC}{OD}$.

4. Copia y completa la tabla de la derecha. La tabla completada indicará las razones correspondientes al dibujo anterior.

1	2	3
$\frac{AB}{OA} = \frac{3}{4}$	$\frac{AB}{OB} = ?$	$\frac{OA}{OB} = ?$
$\frac{CD}{OC} = ?$	$\frac{CD}{OD} = ?$	$\frac{OC}{OD} = ?$
$\frac{EF}{OE} = ?$	$\frac{EF}{OF} = ?$	$\frac{OE}{OF} = ?$

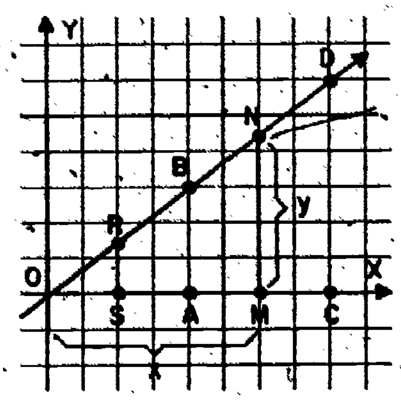
5. (a) Compara las razones de la columna 1. Debes encontrar que esas razones son iguales. Entonces

$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = \frac{?}{?}$$

(b) Compara las razones de la columna 2. ¿Son iguales? ¿Cuál de las razones está en su forma más simple?

(c) ¿Cuál de las razones de la columna 3 está en su forma más simple? ¿Son las razones de esta columna iguales?

6. En la figura de la derecha se muestra una parte del dibujo anterior. Elegimos el punto N sobre $\overrightarrow{OB}$ y trazamos por N una recta perpendicular al eje de las abscisas que interseque a éste en M. La longitud de $\overline{MN}$ es y. La longitud de $\overline{OM}$ es x.



(a) y es aproximadamente $4\frac{1}{2}$ ó 4.5. ¿Cuánto es x?

(b) $\frac{MN}{OM} = \frac{y}{x} = \frac{?}{?}$

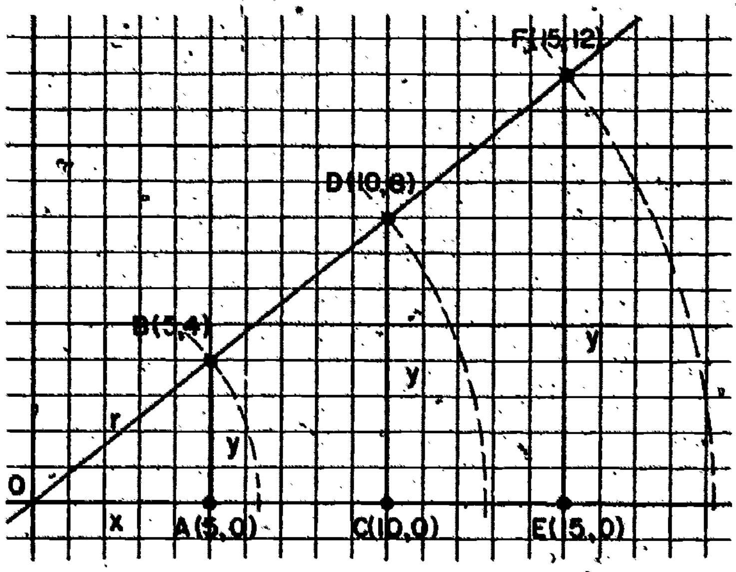
7. Supón que elegimos un punto cualquiera R sobre $\overrightarrow{OB}$. Una recta que pasa por R es perpendicular al eje de las abscisas y lo interseca en S.

(a) ¿Qué clase de triángulo determinan los segmentos que unen O, S y R?

(b) ¿Parece que la razón del lado "y" al lado "x" de tal triángulo sería siempre $\frac{3}{4}$ si utilizamos este rayo particular?

8. (a) En $\triangle OMN$, $\overline{ON}$ es el lado más largo. ¿Qué nombre se da al lado más largo de un triángulo rectángulo?
   (b) Como $\triangle OMN$ es un triángulo rectángulo, se puede usar el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de $\overline{ON}$. Determina ON usando este teorema.

9. En el dibujo a la derecha, el ángulo que $\overrightarrow{OB}$ forma con el eje de las abscisas es diferente del ángulo de la figura para el primer problema. Para $\triangle OAB$ en esta figura, AB es y, OA es x y OB es r. De manera análoga, para los triángulos OCD y OEF,



las medidas de las longitudes de los catetos verticales son y, las de los catetos horizontales son x y las de los terceros lados son r. Para los tres triángulos no podemos obtener la medida exacta de r, la hipotenusa. Para esos triángulos, r es aproximadamente 6.4, 12.8 y 19.2. Usando la información dada antes, completa esta tabla:

Para $\triangle OAB$	$\frac{y}{x} =$	$\frac{y}{r} =$	$\frac{x}{r} =$
Para $\triangle OCD$	$\frac{y}{x} =$	$\frac{y}{r} =$	$\frac{x}{r} =$
Para $\triangle OEF$	$\frac{y}{x} =$	$\frac{y}{r} =$	$\frac{x}{r} =$

10. (a) ¿Qué clase de triángulos son $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ y $\triangle OEF$?
    (b) Explica por qué la medida del ángulo en O es la misma para cada uno de los triángulos.
    (c) ¿Es $\frac{y}{x}$ igual al mismo número para cada uno de los

triángulos?

(d) Para cada triángulo, ¿es $\frac{y}{r}$ igual al mismo número?

(e) ¿Es $\frac{x}{r}$ igual al mismo número para cada uno de los triángulos?

11. Usa el teorema de Pitágoras para verificar que la medida de la longitud de la hipotenusa para cada triángulo es aproximadamente 6.4, 12.8 y 19.2.

Ejercicios 9-1a

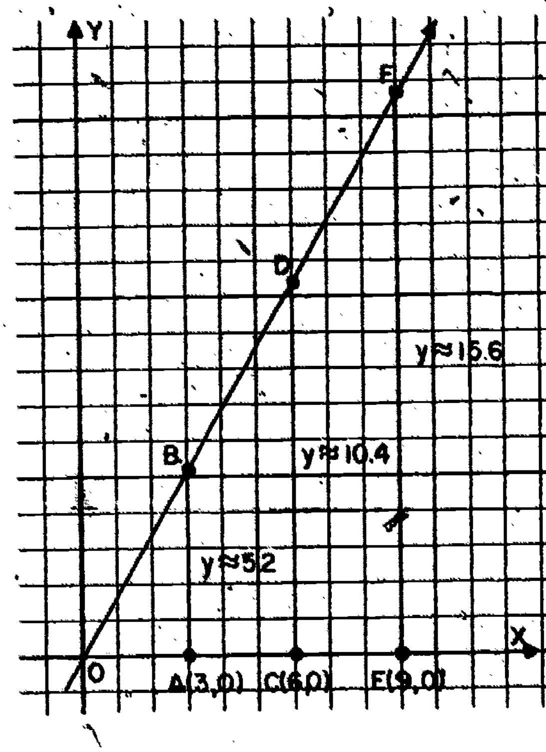
1. Dibuja en una hoja de papel cuadriculado una figura semejante a las de los ejercicios de clase anteriores. Las coordenadas del punto A son (3, 0) y las coordenadas del punto B son (3, 4).

   (a) Determina los valores de $\frac{y}{x}$, $\frac{y}{r}$ y $\frac{x}{r}$ para $\triangle OAB$.

   (b) Las coordenadas del punto D son (6, 8) y las del punto C son (6, 0). Calcula los valores de $\frac{y}{x}$, $\frac{y}{r}$ y $\frac{x}{r}$ para $\triangle OCD$. Compara tus respuestas para (b) con las respuestas para (a).

   (c) Elige dos puntos diferentes sobre $\overrightarrow{OB}$ y calcula los valores de las tres razones. Compara tus respuestas para (c) con las respuestas para (a) y (b).

2. En la figura de la derecha, se ha dibujado el rayo que pasa por O de manera que forma con el eje de las abscisas un ángulo de 60°. Las rectas que pasan por B, D y F se han trazado perpendiculares al eje de las abscisas, al cual intersecan en los puntos A, C y E cuyas coordenadas se indican. En la figura se muestran las longitudes aproximadas de y. Para los tres triángulos, la hipotenusa r tiene por medidas 6, 12 y 18,



respectivamente.

(a) Determina los valores de $\frac{y}{x}$, $\frac{y}{r}$ y $\frac{x}{r}$ para cada triángulo y completa una tabla semejante a la de los ejercicios de clase.

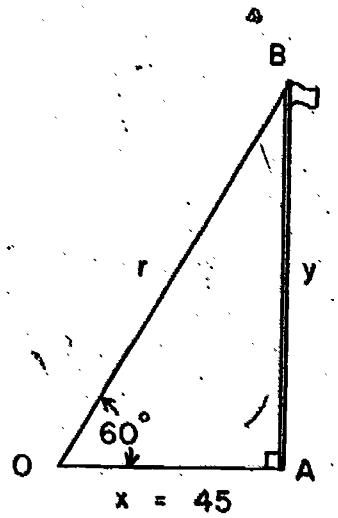
(b) Compara los valores de $\frac{y}{x}$ para cada triángulo. ¿Son iguales?

(c) ¿Son los valores de $\frac{y}{r}$ iguales para todos los triángulos?

(d) ¿Son los valores de $\frac{x}{r}$ iguales para todos los triángulos?

(e) Toma otro punto cualquiera sobre $\overrightarrow{OB}$. Determina las longitudes de x, y y r. Luego determina las tres razones para este nuevo triángulo y compáralas con las razones que has encontrado en la primera parte de este problema.

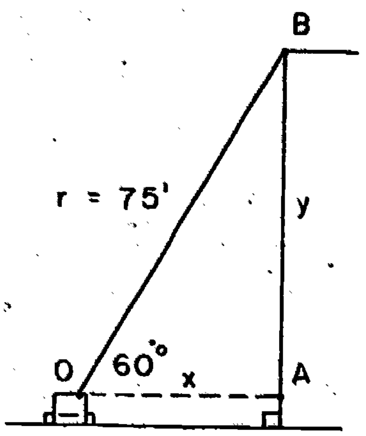
3. En la figura de la derecha, $\triangle AOB$ es un triángulo rectángulo. $\angle AOB$ tiene 60° como en el problema 2.



(a) Del problema 2, ¿cuál es el valor de $\frac{y}{x}$?

(b) Representemos con T el valor de $\frac{y}{x}$. Entonces $\frac{y}{x} = T$. Escribe $\frac{y}{x} = T$, reemplazando T por tu respuesta de (a) y reemplazando x por 45. Calcula la altura aproximada y del asta de la bandera.

4. La figura de la derecha representa una escalera colocada desde el carro de los bomberos hasta la cumbre del edificio. $\triangle AOB$ es un triángulo rectángulo, y $\angle AOB$

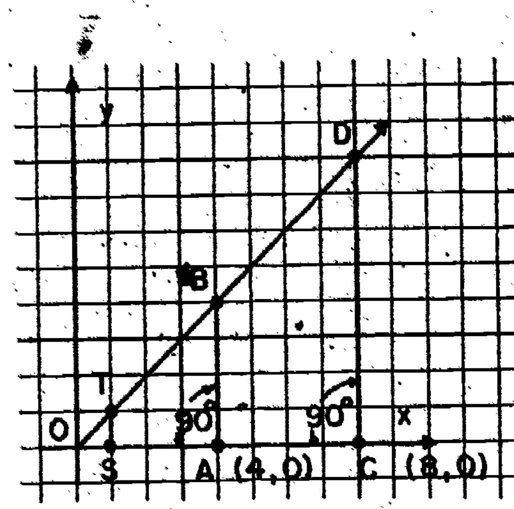


es un ángulo de $60°$.

(a) Del problema 2, ¿cuál es el valor de $\frac{y}{r}$?

(b) Reemplaza K en $\frac{y}{r} = K$ por tu respuesta de (a), y reemplaza r por 75. Desprecia la altura del carro de bomberos y halla el valor aproximado de la longitud de y.

5. Usa el dibujo a la derecha para responder a las siguientes preguntas:



(a) $\overline{AO} \cong \overline{AB}$ y $\overline{CO} \cong \overline{CD}$. ¿Qué clase de triángulos son $\triangle OAB$ y $\triangle OCD$?

(b) Halla la medida de $\angle AOB$ sin usar un limbo graduado.

(c) ¿Cuánto es $\frac{y}{x}$ para cada uno de los triángulos?

(d) Toma un punto cualquiera sobre $\overrightarrow{OB}$ y halla $\frac{y}{x}$. Luego compara tu respuesta con la de (c).

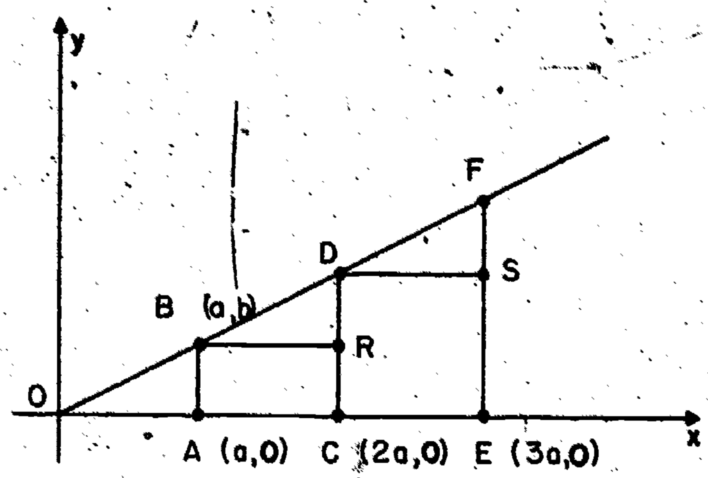
(e) ¿Es el valor de $\frac{y}{x}$ el mismo cuando es de $30°$ el ángulo que el rayo forma con el eje de las abscisas, que cuando el ángulo es de $45°$?

6. Usando los dibujos del problema 5, muestra que en $\triangle OST$, el valor de $\frac{y}{r}$ puede escribirse como $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por las respuestas a las preguntas de los ejercicios anteriores parecería que las razones $\frac{y}{x}$, $\frac{y}{r}$ y $\frac{x}{r}$ dependen de qué rayo pasando por el origen se elige. Si el ángulo que el rayo forma con el eje de las abscisas es $60°$, $\frac{y}{x}$ es aproximadamente 1.73 para cualquier punto del rayo. Si el ángulo que el rayo forma con el eje de las abscisas es $45°$, $\frac{y}{x}$ es 1.00 para cualquier punto sobre el rayo. Entonces, la razón depende del ángulo que el rayo forma con el eje de las abscisas y no del punto elegido sobre el rayo. Ahora verás por qué esto debe ser así.

Ejercicios de clase 9-1b

1. En la figura, las coordenadas del punto A son $(a, 0)$ donde a es un número positivo. Las coordenadas del punto B son (a, b) donde b es un número positivo. Los ángulos en A, C y E son rectos. $\overline{BR}$ y $\overline{DS}$ son paralelos al eje de las abscisas.



   (a) La medida de la longitud de $\overline{OA}$ es a. ¿Qué otros segmentos son congruentes con $\overline{OA}$?

   (b) Muestra que $\triangle OAB$, $\triangle BRD$ y $\triangle DSF$ son congruentes.

   (c) $\overline{AB}$ tiene b unidades de longitud. ¿Qué otros segmentos son congruentes con $\overline{AB}$?

   (d) ¿Cuál es la medida de la longitud de $\overline{CD}$?

   (e) ¿Cuál es la medida de la longitud de $\overline{EF}$?

2. Copia y completa la siguiente tabla. Observa que c es la longitud de la hipotenusa de cada triángulo.

Para $\triangle OAB$	$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$	$\frac{y}{r} = \frac{b}{c}$	$\frac{x}{r} = ?$
Para $\triangle OCD$	$\frac{y}{x} = \frac{2b}{2a}$	$\frac{y}{r} = ?$	$\frac{x}{r} = ?$
Para $\triangle OEF$	$\frac{y}{x} = \frac{3b}{3a}$	$\frac{y}{r} = ?$	$\frac{x}{r} = ?$

3. (a) ¿Es la razón $\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3}$? Explica la respuesta.

   (b) ¿Es la razón $\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b}$? ¿Es $\frac{2a}{2b} = \frac{3a}{3b}$?

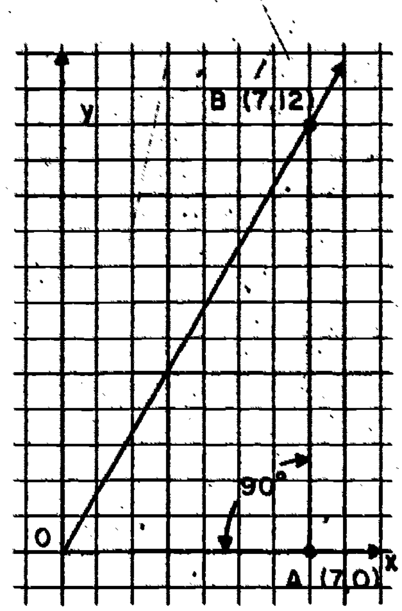
   (c) ¿Tiene $\frac{y}{x}$ el mismo valor para cada uno de los triángulos? ¿Qué ocurre con los valores de $\frac{y}{r}$? ¿Y de $\frac{x}{r}$?

4. Toma un punto sobre $\overrightarrow{OB}$ que tenga coordenadas (x, y), de manera que $x = 4a$.
   (a) ¿Cuál es el valor de y?
   (b) ¿Cuál es el valor de la razón $\frac{y}{x}$?
5. Toma un punto sobre $\overrightarrow{OB}$ que tenga coordenadas (x, y), de tal manera que $x = \frac{1}{2}a$.
   (a) ¿Cuál es el valor de y?
   (b) ¿Cuál es el valor de la razón $\frac{y}{x}$?

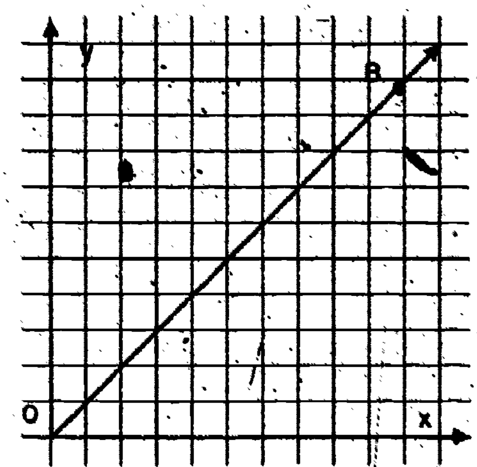
Aparentemente para todo punto que tenga coordenadas (x, y) sobre un rayo particular $\overrightarrow{OB}$, $\frac{y}{x}$ representa siempre un mismo número. De modo análogo, $\frac{y}{r}$ representa un mismo número y también $\frac{x}{r}$ representa un mismo número. Entonces, las razones se determinan solamente mediante el ángulo formado por el rayo que pasa por el origen y el punto (x, y), y por la dirección positiva del eje de las abscisas.

Ejercicios 9-1b

1. Usa la figura de la derecha para hallar las soluciones a los siguientes problemas:
   (a) Determina el valor de $\frac{y}{x}$.
   (b) Usa el teorema de Pitágoras para determinar la longitud de $\overline{OB}$.
   (c) Halla el valor de $\frac{y}{r}$.
   (d) Halla el valor de $\frac{x}{r}$.
   (e) Utilizando un limbo graduado, halla la medida de $\angle$ AOB.



2. En la figura de la derecha, $\overline{OB}$ es congruente con $\overline{OB}$ de la figura del problema 1. Observa que los ángulos formados por los rayos con el eje de las abscisas no son los mismos.

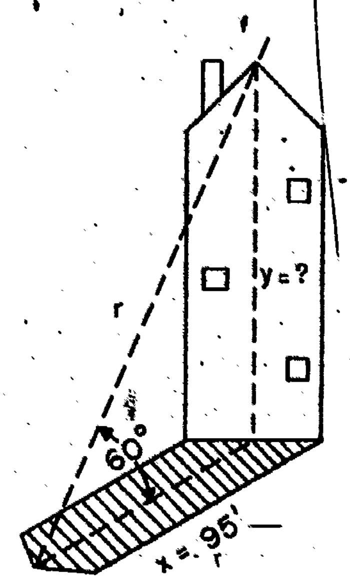


(a) Determina el valor de $\frac{y}{x}$.

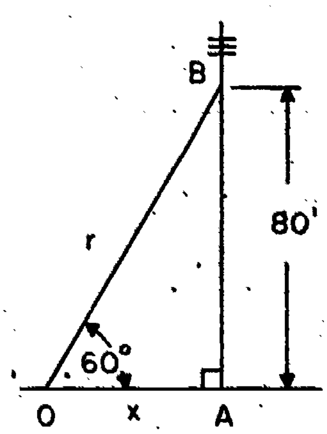
(b) Usa el teorema de Pitágoras para determinar la longitud de $\overline{OB}$.

(c) Halla el valor de $\frac{y}{r}$ y de $\frac{x}{r}$ y compara los resultados con los del problema 1(c) y 1(d). ¿Son los mismos?

3. En la figura de la derecha, la altura del edificio es y. Cuando el ángulo de los rayos del sol con la horizontal es $60°$, la longitud de la sombra del edificio, x, es 95 pies. Calcula y, si $\frac{y}{x}$ es alrededor de 1.73.



4. Una antena de televisión está montada sobre un poste de 80 pies. $\frac{y}{r} \approx 0.87$. Reemplaza "y" en la proposición numérica por 80 y calcula la longitud aproximada del alambre tensor de O a B.



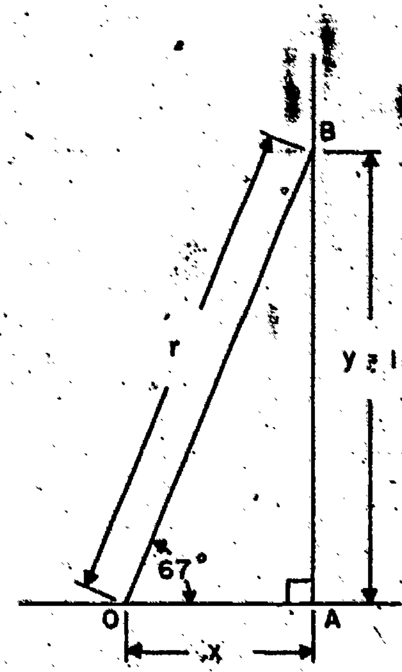
5. En la figura del problema 4, si la medida de $\angle$ AOB es 60°, ¿cuál es la medida de $\angle$ ABO?

6. En la figura de la derecha, $\overline{OB}$ representa una escalera que descansa contra la pared. La parte superior de la escalera alcanza un punto que está a 12 pies sobre el piso. Para responder a las preguntas de más abajo, usa los siguientes valores: $\frac{y}{x} \approx 2.36$; $\frac{y}{r} \approx 0.92$.

   (a) ¿A qué distancia está el pie de la escalera de la base de la pared?

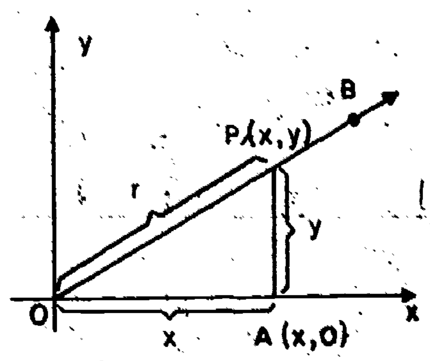
   (b) ¿De qué longitud es la escalera?

   (c) Supón que el pie de la escalera está a cinco pies de distancia de la base de la pared. Usa el teorema de Pitágoras para verificar tu respuesta a (b).



9-2. Razones trigonométricas

En el dibujo, considera un rayo particular $\overrightarrow{OB}$ que pasa por el origen. Para un punto P cualquiera, de coordenadas (x, y), sobre este rayo, queda determinado un triángulo rectángulo con el ángulo recto en un punto del eje de las abscisas. En la sección anterior has aprendido que $\frac{y}{x}$ es el mismo para todos los puntos



sobre $\overrightarrow{OB}$. Con otras palabras, $\frac{y}{x}$ depende solamente del ángulo AOB y no del punto particular P escogido. Llamamos a esta razón la <u>tangente</u> del ángulo AOB. La tangente del ángulo AOB se abrevia tg $\angle$ AOB.

$$\text{tg} \angle AOB = \frac{y}{x} = \frac{AP}{OA} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{longitud del cateto adyacente}}$$

Has aprendido también que el valor de $\frac{y}{r}$ es el mismo para todos los puntos del rayo $\overrightarrow{OB}$, donde r es la medida de la longitud de $\overline{OP}$, es decir, la hipotenusa de ΔAOP. Llamamos a esta razón el <u>seno</u> del ángulo AOB. El seno del ángulo AOB se abrevia sen $\angle$ AOB.

$$\text{sen} \angle AOB = \frac{y}{r} = \frac{AP}{OP} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

Finalmente, has aprendido que el valor de $\frac{x}{r}$ es el mismo para todos los puntos del rayo $\overrightarrow{OB}$. Llamaremos a esta razón el <u>coseno</u> del ángulo AOB, que en forma abreviada se escribe cos $\angle$ AOB.

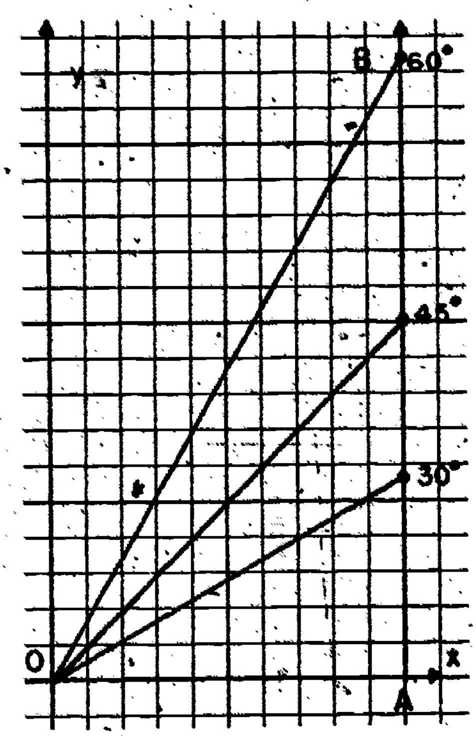
$$\cos \angle AOB = \frac{x}{r} = \frac{OA}{OP} = \frac{\text{longitud del cateto adyacente}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

En los Ejercicios 9-1a, hemos encontrado las siguientes razones para un ángulo de 60°:

$$\text{tg } 60° \approx 1.73, \quad \text{sen } 60° \approx 0.87, \quad \cos 60° = 0.50.$$

Ejercicios de clase 9-2

1. En la figura de la derecha, la recta que pasa por A es perpendicular al eje de las abscisas. Los rayos que parten del origen intersecan a la recta en los puntos B.



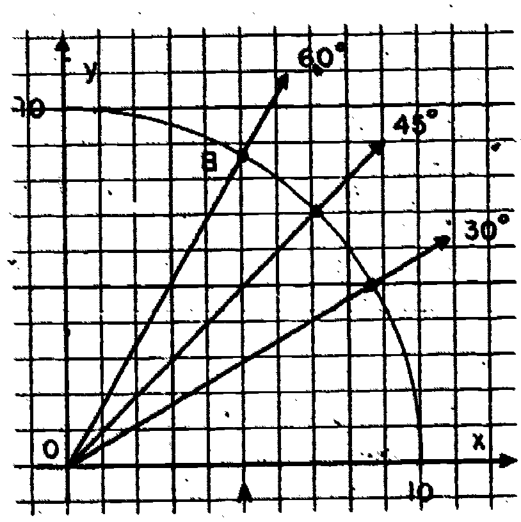
   (a) Para cada uno de los triángulos, ¿cuál es la medida de la longitud de $\overline{OA}$?

   (b) Para el rayo marcada con 60°, ¿cuál es la medida de la longitud de $\overline{AB}$?

   (c) Usa tus respuestas de (a) y (b) para calcular la tangente de $\angle$ BOA. (Calcula tus resultados con 2 cifras decimales.)

   (d) De manera análoga, calcula las tangentes de 45° y 30°.

2. En la figura de la derecha, el radio del arco es 10 unidades. Sea B el punto en que cada rayo que pasa por el origen interseca a la circunferencia. Una recta que pasa por B es perpendicular al eje de las abscisas. Para cada recta el punto de intersección es A. Calcula tus resultados con dos cifras decimales.



(a) Para cada uno de los triángulos, ¿cuál es la medida de la longitud de $\overline{OB}$?

(b) Para el triángulo determinado por el rayo marcado 60°, ¿cuál es la medida de la longitud de $\overline{AB}$?

(c) Usando tus respuestas de (a) y (b), calcula el seno de ∠ BOA.

(d) De manera análoga, calcula el seno de 45° y de 30°.

(e) Para el triángulo determinado por el rayo marcado 60°, ¿cuál es la medida de la longitud de $\overline{OA}$?

(f) Usando tus respuestas para (a) y (e), calcula el coseno de ∠ BOA. (Calcula tus resultados con 2 cifras decimales.)

(g) De manera análoga, calcula los cosenos de los ángulos determinados por los rayos marcados 45° y 30°.

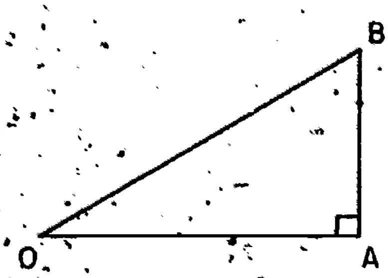
3. (a) ¿Qué relación hay entre el seno de un ángulo de 30° y el coseno de un ángulo de 60°?

(b) ¿Qué relación hay entre el seno de un ángulo de 45° y el coseno de un ángulo de 45°?

4. Usando tus respuestas para los problemas 1 y 2, copia y completa la siguiente tabla. Conserva una copia de la tabla, pues la necesitarás en los Ejercicios 9-2.

m(∠ BOA)	sen ∠ BOA	tg ∠ BOA	
30			60
45			45
60			30
	cos ∠ BOA	(Mira la columna de la derecha para la medida del ángulo cuando uses el coseno del ángulo.)	

5. Considera el triángulo rectángulo de la figura. m∠ BOA tiene una medida de 30, y la longitud de $\overline{OA}$ es 6 pies.



(a) ¿Cuál de las razones trigonométricas se refiere a los lados opuesto y adyacente?

(b) De tu tabla, ¿cuál es la medida de la razón $\frac{AB}{OA}$ para $\angle$ BOA?

(c) Representemos con y la medida de la longitud de $\overline{AB}$. Entonces,

$$\frac{y}{6} = \text{tg} \angle \text{BOA}.$$

Resuelve esta ecuación para hallar la medida de la longitud de $\overline{AB}$.

6. Cuando decimos "tg $\angle$ AOB = $\frac{y}{x}$", también queremos decir "$\frac{y}{x}$ = tg $\angle$ AOB". Es decir, podemos ir de izquierda a derecha o de derecha a izquierda con nuestra definición de las razones trigonométricas. Podrías aun decir que las razones se usan "hacia adelante y hacia atrás". Debes aprenderlas en ambas direcciones. En cada uno de los siguientes casos, indica qué razón trigonométrica se define en relación con los dos lados indicados de un triángulo rectángulo:

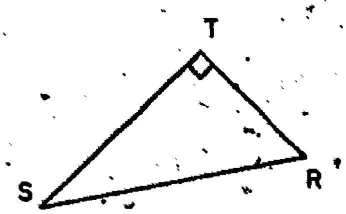
(a) Hipotenusa y cateto opuesto.

(b) Cateto adyacente e hipotenusa.

(c) Cateto adyacente y cateto opuesto.

(d) Hipotenusa y cateto adyacente.

7. Aludiendo al triángulo de la derecha, completa las siguientes oraciones:



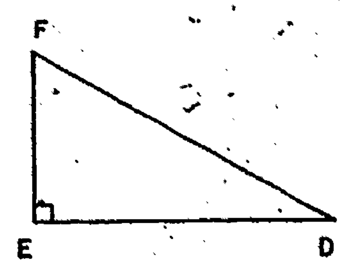
(a) Para $\angle$ RST, el lado opuesto es ___.

(b) Para $\angle$ RST, el lado adyacente es ___.

(c) Para $\angle$ SRT, el lado opuesto es ___.

(d) Para $\angle$ SRT, el lado adyacente es ___.

8. Como en el caso anterior, completa estas otras oraciones:



(a) El lado opuesto a $\angle$ EDF es ___.

(b) El lado adyacente a $\angle$ EDF es ___.

(c) El lado opuesto a $\angle$ DFE es ___.

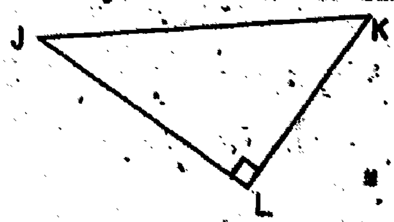
(d) El lado adyacente a $\angle$ DFE es ___.

9. En el triángulo de la figura, indica primero el lado opuesto al ángulo dado y luego nombra el lado adyacente al mismo.

(a) $\angle$ LJK

(b) $\angle$ JKL

(c) La hipotenusa es ___.

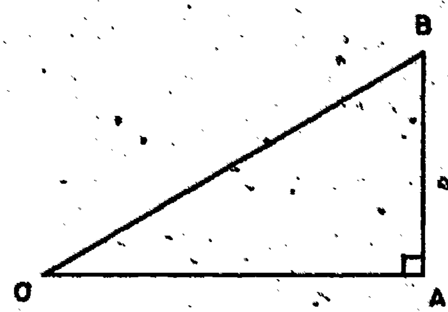


10. Para el triángulo rectángulo OAB supón que te dan las razones trigonométricas para la tangente de $\angle$ AOB, seno de $\angle$ AOB y coseno de $\angle$ AOB. ¿Qué razón trigonométrica usarías para determinar cada uno de los dos lados restantes del triángulo si conocieras los datos siguientes?

(a) OA = 7

(b) OB = 6

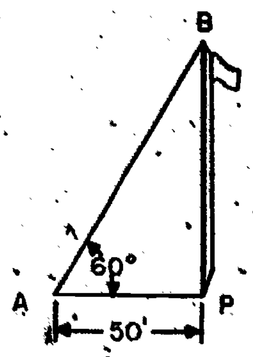
(c) AB = 2



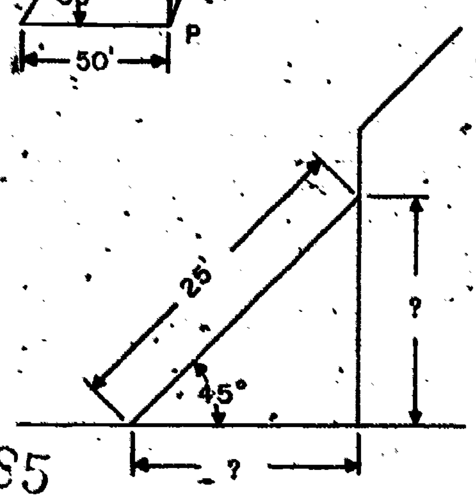
11. Para el problema anterior, responde a cada una de las preguntas para $\angle$ ABO en lugar de $\angle$ AOB.

Ejercicios 9-2

1. El punto A está a 50 pies de la base del asta de la bandera. Halla la altura del asta de la bandera si m($\angle$ PAB) = 60. ($\angle$ PAB se llama ángulo de elevación de la cumbre del mástil.)

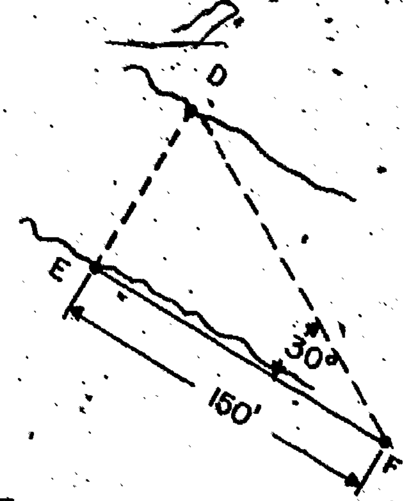


2. Una escalera de 25 pies se coloca contra la pared de un edificio. Si forma un ángulo de 45° con el suelo, ¿a qué altura se apoyará sobre la pared?

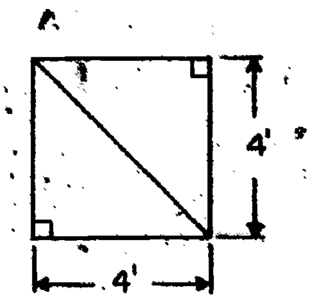


3. Usa la figura del problema anterior para determinar a qué distancia de la base de la pared está colocado el pie de la escalera.

4. Para hallar la medida del ancho de un río, dos jóvenes clavan estacas en E y F, con referencia a un árbol de la ribera opuesta, D. DEF es un ángulo recto. La medida del ángulo DFE es 30. Si la distancia de E a F es 150 pies, ¿cuál es el ancho del río?

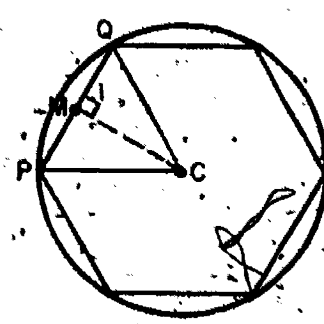


5. (a) El lado de un cuadrado tiene una longitud de 4 pies. Calcula la longitud de la diagonal usando una de las razones trigonométricas.
   (b) Verifica tu respuesta para (a) usando el teorema de Pitágoras.

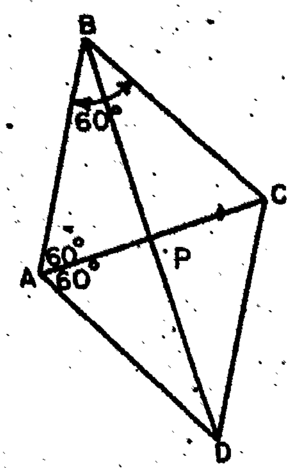


6. Calcula estas razones: $\frac{\text{sen } 60^\circ}{\text{sen } 30^\circ}$ y $\frac{\text{tg } 60^\circ}{\text{tg } 30^\circ}$.
   Explica a tu manera por qué crees que estas razones no tienen por valor 2.

7. Un hexágono regular se inscribe en una circunferencia de radio 10 pulgadas.
   (a) ¿Cuál es la medida de $\angle$ PCQ?
   (b) ¿Cuál es la medida de $\angle$ CPQ?
   (c) Halla CM.
   (d) Halla PQ.



8. La figura ABCD consiste en la reunión de dos triángulos equiláteros ABC y ACD. Los lados de los triángulos tienen 10 pulgadas de longitud.
   (a) ¿Cuál es la medida de $\angle$ ABD?
   (b) ¿Cuál es la medida de $\angle$ DBC?
   (c) ¿Por qué es $\overline{BD} \perp \overline{AC}$?
   (d) Determina la medida aproximada de la longitud de $\overline{BD}$.

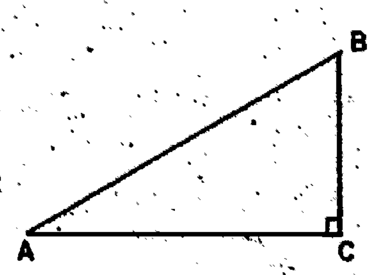


9-3. Lectura de tablas

En el Capítulo 4 has usado una tabla de raíces cuadradas, y en los Ejercicios de clase 9-2 has construido una tabla de los valores de las razones trigonométricas para los siguientes tres ángulos de amplitudes: 30°, 45° y 60°. Probablemente has observado que sen 30° = cos 60°. ¿Piensas que esto podría ser cierto para otros ángulos? ___

Puedes haber observado que para cualquier triángulo rectángulo, la suma de las medidas de los dos ángulos más pequeños es 90. La suma de 30° y 60° es 90°. De manera parecida, la suma de 45° y 45° es 90°. Dos ángulos, la suma de cuyas medidas es 90, se llaman <u>ángulos complementarios</u>. Un ángulo de 30° y un ángulo de 60° son complementarios. Análogamente, un ángulo de 20° y uno de 70° son ángulos complementarios. En realidad, los dos ángulos no rectos de un triángulo rectángulo serán siempre ángulos complementarios.

Observa la siguiente figura, y refiérete a las razones trigonométricas que se dan a continuación:



$$\text{sen} \angle CAB = \frac{\text{longitud del cateto opuesto}}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{CB}{AB}$$

$$\cos \angle CBA = \frac{\text{longitud del cateto adyacente}}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{CB}{AB}$$

Hemos visto que sen $\angle$ CAB = cos $\angle$ CBA. Los ángulos CAB y CBA son ángulos complementarios. Entonces parece que para todo par de ángulos complementarios, el seno de uno de los ángulos sería igual al coseno del otro. ¿Es sen $\angle$ CBA = cos $\angle$ CAB en la figura? Observa que ambas razones son las mismas, $\frac{AC}{AB}$. Entonces, no es accidental que sen 30° = cos 60°. Resulta también cierto que sen 20° = cos 70°, cos 10° = sen 80°, etc.

Usamos esta propiedad para abreviar la tabla que construimos para tres ángulos. De la misma manera, esta propiedad se usa en la tabla de las razones trigonométricas de la página 359. Se indican las amplitudes de los ángulos de 1° a 45° a la izquierda. Las amplitudes de los ángulos de 45° a 89° se dan a la derecha, leyéndose a partir del pie de la página hacia arriba. Las diversas razones se indican en la parte superior de la página para todos los ángulos entre 1° y 45°. Para los ángulos entre 45° y 89° los nombres de las razones se indican al pie de la página.

Para hallar sen 20° en la tabla, primero buscamos 20° en la columna de la izquierda, pues 20 < 45. Luego miramos en la columna cuyo nombre "seno" está en la parte superior de la tabla. El número que está en la columna de los senos y en la fila de 20° es 0.3420. Entonces, sen 20° ≈ 0.3420, correcto con cuatro cifras decimales. Observa que el signo de aproximación se usa para indicar que sabemos que nuestro decimal es correcto solamente con cuatro cifras.

Para hallar cos 70°, busca la amplitud del ángulo en la columna de la derecha, pues 70 > 45. Debido a que estás usando la

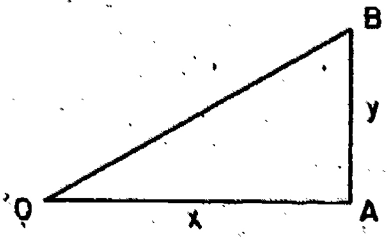
columna de la derecha, busca la razón trigonométrica al pie de la tabla. En la columna marcada "coseno" que aparece al pie de la página, hallas 0.3420 para la fila correspondiente a 70°. Entonces, cos 70° $\approx$ 0.3420, con la aproximación de una diezmilésima. Observa que esto es lo mismo que sen 20°. Halla sen 70°. Resulta ser alrededor de 0.9397.

Observa que hay otra razón indicada en la tabla; tal razón es la <u>cotangente</u>. Así como hemos llamado coseno de un ángulo al seno del complemento de ese ángulo, llamamos <u>cotangente</u> de un ángulo a la tangente del complemento de ese ángulo. Para el triángulo de la derecha,

$$\text{tg} \angle AOB = \frac{y}{x} = \text{ctg} \angle ABO$$

y

$$\text{tg} \angle ABO = \frac{x}{y} = \text{ctg} \angle AOB$$



Observa que el "co" en coseno y cotangente ha sido sugerido por el "co" en "complementario". Los ángulos AOB y ABO de la figura anterior son ángulos complementarios.

Puedes encontrar tablas más completas y más precisas de las razones trigonométricas en una biblioteca. La gente que utiliza las matemáticas en su trabajo diario, emplea libros que contienen varios conjuntos de tablas matemáticas.

RAZONES TRIGONOMETRICAS

Angulo	Seno	Tangente	Cotangente	Coseno	
1°	0.0175	0.0175	57.290	0.9998	89°
2°	0.0349	0.0349	28.636	0.9994	88°
3°	0.0523	0.0524	19.081	0.9986	87°
4°	0.0698	0.0699	14.301	0.9976	86°
5°	0.0872	0.0875	11.430	0.9962	85°
6°	0.1045	0.1051	9.5144	0.9945	84°
7°	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	83°
8°	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	82°
9°	0.1564	0.1584	6.3138	0.9877	81°
10°	0.1736	0.1763	5.6713	0.9848	80°
11°	0.1908	0.1944	5.1446	0.9816	79°
12°	0.2079	0.2126	4.7046	0.9781	78°
13°	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	77°
14°	0.2419	0.2493	4.0108	0.9703	76°
15°	0.2588	0.2679	3.7321	0.9659	75°
16°	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	74°
17°	0.2924	0.3057	3.2709	0.9563	73°
18°	0.3090	0.3249	3.0777	0.9511	72°
19°	0.3256	0.3443	2.9042	0.9455	71°
20°	0.3420	0.3640	2.7475	0.9397	70°
21°	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	69°
22°	0.3746	0.4040	2.4751	0.9272	68°
23°	0.3907	0.4245	2.3559	0.9205	67°
24°	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	66°
25°	0.4226	0.4663	2.1445	0.9063	65°
26°	0.4384	0.4877	2.0503	0.8988	64°
27°	0.4540	0.5095	1.9626	0.8910	63°
28°	0.4695	0.5317	1.8807	0.8829	62°
29°	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	61°
30°	0.5000	0.5774	1.7321	0.8660	60°
31°	0.5150	0.6009	1.6643	0.8572	59°
32°	0.5299	0.6249	1.6003	0.8480	58°
33°	0.5446	0.6494	1.5399	0.8387	57°
34°	0.5592	0.6745	1.4826	0.8290	56°
35°	0.5736	0.7002	1.4281	0.8192	55°
36°	0.5878	0.7265	1.3764	0.8090	54°
37°	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	53°
38°	0.6157	0.7813	1.2799	0.7880	52°
39°	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	51°
40°	0.6428	0.8391	1.1918	0.7660	50°
41°	0.6561	0.8693	1.1504	0.7547	49°
42°	0.6691	0.9004	1.1106	0.7431	48°
43°	0.6820	0.9325	1.0724	0.7314	47°
44°	0.6947	0.9657	1.0355	0.7193	46°
45°	0.7071	1.0000	1.0000	0.7071	45°
	Coseno	Cotangente	Tangente	Seno	Angulo

Ejercicios 9-3.

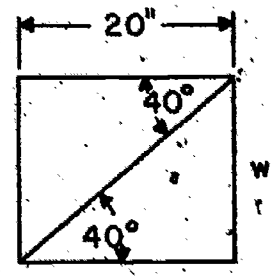
1. Usa la tabla para hallar las siguientes razones trigonométricas:

(a)	sen 10°	(f)	tg 40°
(b)	tg 10°	(g)	tg 50°
(c)	sen 41°	(h)	tg 60°
(d)	sen 63°	(i)	tg 70°
(e)	sen 82°	(j)	sen 88°

2. Verifica los enunciados siguientes estudiando los números de la tabla. ¿Estás de acuerdo con lo que afirman esos enunciados?
   (a) El seno de un ángulo en la tabla está siempre entre 0 y 1.
   (b) El seno de un ángulo crece cuando el ángulo crece de 1° a 89°.
   (c) El seno de un ángulo menor que 30° es menor que $\frac{1}{2}$.
   (d) La diferencia entre dos lecturas consecutivas de la tabla varía a lo largo de la misma.
   (e) La diferencia entre los senos de dos ángulos consecutivos en la tabla es mayor para ángulos consecutivos pequeños que para ángulos consecutivos grandes.
3. Usa las tangentes de los ángulos dados en las tablas para contestar a las siguientes preguntas:
   (a) ¿Está la tangente de un ángulo siempre entre 0 y 1?
   (b) ¿Crece la tangente cuando un ángulo crece desde 1° hasta 89°?
   (c) ¿Varían a lo largo de la tabla las diferencias entre lecturas consecutivas?
   (d) La diferencia entre las tangentes de dos ángulos consecutivos de la tabla, ¿es mayor para ángulos consecutivos pequeños que para ángulos consecutivos grandes?
4. Halla los siguientes productos:

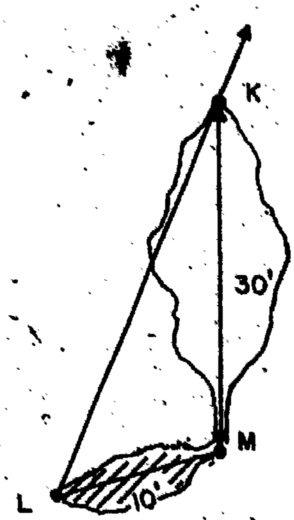
(a)	100 · (sen 32°)	(c)	0.27 · (sen 73°)
(b)	81 · (tg 48°)	(d)	0.05 · (tg 80°)

5. La diagonal del rectángulo que se muestra a la derecha forma un ángulo de 40° con el lado más largo. Halla el ancho del rectángulo si su longitud es 20 pulgadas.



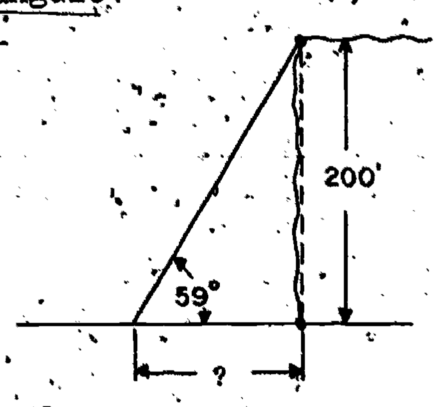
6. El triángulo ABC es un triángulo rectángulo con $\angle$ ACB recto. AC = 5, y BC = 4.
   (a) ¿Qué razón trigonométrica de $\angle$ BAC es $\frac{AC}{BC} = \frac{5}{4}$?
   (b) Usa la tabla de razones trigonométricas para hallar la medida aproximada de $\angle$ BAC.

7. La longitud de la sombra de un árbol de 30 pies es 10 pies. ¿Cuál es la medida aproximada del ángulo de elevación ($\angle$ KLM) del sol? (Recuerda que el ángulo de elevación de un objeto desde un punto L es el ángulo entre la horizontal que pasa por L y la recta que pasa por L y el objeto dado. En este caso el objeto dado es el sol.)

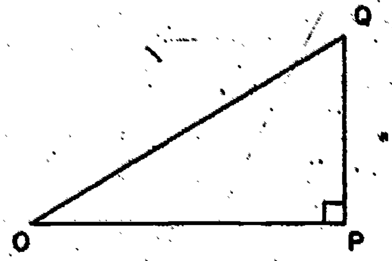


8. En el problema anterior, supón que la longitud de la sombra es 20 pies en vez de 10 pies. ¿Sería tu respuesta la mitad de la respuesta anterior? Si es así, ¿por qué? Si no es así, ¿cuál sería la medida aproximada del ángulo?

9. Un observador ve que el ángulo de elevación desde el punto en que él está, a la cumbre de un barranco es 59°. Si el barranco tiene 200 pies de alto, calcula la distancia del observador al pie del barranco, con la aproximación de un pie.



10. Se ha llamado cotangente de un ángulo a la tangente del complemento de ese ángulo. En la figura,



$$\text{ctg} \angle POQ = \text{tg} \angle PQO$$

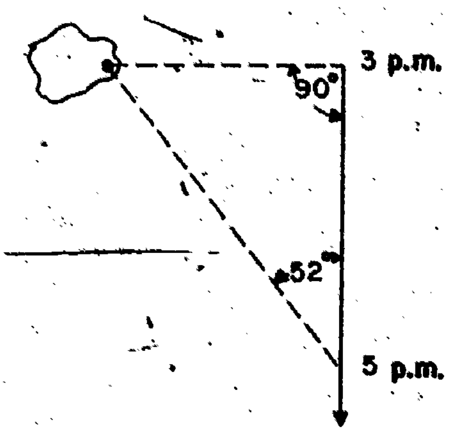
(a) Muestra que

$$\text{ctg} \angle POQ = \frac{1}{\text{tg} \angle POQ}$$

Esta sería una manera distinta de definir la cotangente: la cotangente de un ángulo es el número recíproco de la tangente del ángulo.

(b) ¿Es el seno de un ángulo el recíproco del coseno del ángulo? Explica tu respuesta mediante el dibujo.

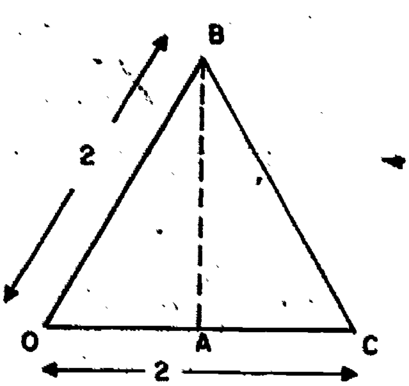
11. El navegante de un barco que se dirige directamente hacia el sur, observa un faro exactamente en dirección oeste a las 3 p.m. A las 5 p.m., el faro está a 52° noroeste. El barco se mueve a una velocidad de 15 millas por hora.



(a) ¿A qué distancia del faro estaba el barco a las 3 p.m.?

(b) ¿A qué distancia del faro estaba el barco a las 5 p.m.? (Calcula tu respuesta con la aproximación de una décima de milla.)

12. El triángulo OBC de la derecha es un triángulo equilátero. Cada lado del triángulo tiene por medida 2.



(a) ¿Cuál es la amplitud de los ángulos BOC, OBC y BCO? Explica tu respuesta.

(b) El vértice B se une al punto medio A de $\overline{OC}$. Muestra que ΔOAB es un triángulo rectángulo.

(c) Muestra que ΔOAB es un triángulo rectángulo.

(d) Determina la amplitud de $\angle OBA$.

(e) Determina la longitud de $\overline{AB}$ usando una razón trigonométrica.

13. Con referencia a la figura del problema 12, $m(\angle COB) = 60$. La medida de $\overline{OB} = 2$, y la medida de $\overline{OA} = 1$.

(a) $\cos \angle AOB = \cos 60° = \frac{OA}{OB} = \frac{?}{?}$

(b) Para calcular $\text{sen} \angle AOB$ y $\text{tg} \angle AOB$ debemos determinar la medida de $\overline{AB}$, que llamaremos y. Por el teorema de Pitágoras,

$$(OA)^2 + (AB)^2 = (OB)^2$$

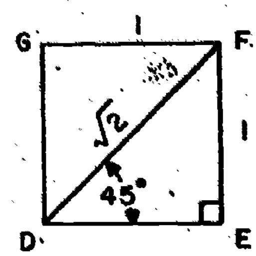
ó, $$1^2 + y^2 = 2^2$$

entonces, $$y^2 = ?$$

y, $$y = ?$$

(c) Utiliza tus resultados de la pregunta (b) para hallar sen 60° y tg 60°, y verifica los resultados con los valores dados en la tabla.

14. El cuadrado que se muestra a la derecha tiene una medida de 1 unidad por cada lado.



(a) Verifica que la medida de $\overline{DF}$ es $\sqrt{2}$.

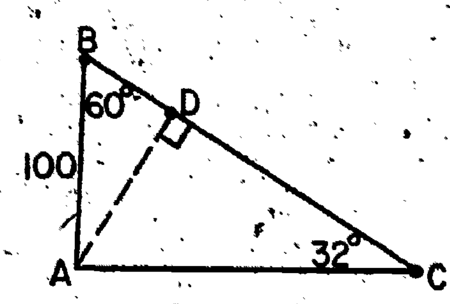
(b) Si $DF = \sqrt{2}$, entonces $\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Puedes determinar una expresión decimal para $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dividiendo 1 por 1.4142, pero es un cálculo trabajoso. Recuerda que cualquier número dividido por sí mismo (con la excepción de 0) es 1. Entonces,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1, \text{ y } \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Es más fácil dividir 1.4142 por 2 que dividir 1 por 1.4142. Halla sen 45° usando el cálculo anterior, y

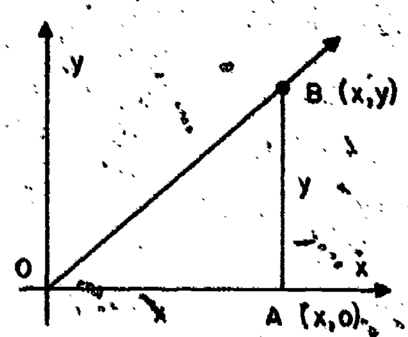
verifica tu respuesta con la tabla.

*15. En la figura a la derecha
$\angle ABC$ tiene por medida 60,
$\angle ACB$ tiene por medida 32,
en grados, y $AB = 100$. Halla
(a) $m(\overline{AD})$
(b) $m(\overline{BC})$



9-4. Pendiente de una recta

El dibujo de la derecha es semejante al que se ha usado en la Sección 9-1. Has aprendido que para un rayo particular $\overrightarrow{OB}$ que parte del origen y pasa por el punto (x, y), todas las razones $\frac{y}{x}$ son iguales. Entonces, para un rayo particular,



$$\frac{y}{x} = m$$

donde m es otro nombre para la misma razón. Sin embargo, has aprendido que $\frac{y}{x}$ es la tangente del ángulo que forma el rayo con el eje de las abscisas. Por tanto, m es la tangente del ángulo AOB. El número m depende del rayo particular que se ha escogido y no de un punto particular sobre el rayo.

En virtud de la propiedad multiplicativa de la igualdad,

$$\frac{y}{x}(x) = m(x)$$

y, $$y\left(\frac{x}{x}\right) = mx, \text{ pero } \frac{x}{x} = 1,$$

entonces, $$y = mx$$

Así que, una ecuación equivalente para $\frac{y}{x} = m$ es $y = mx$. Si la tangente del ángulo es 2, entonces,

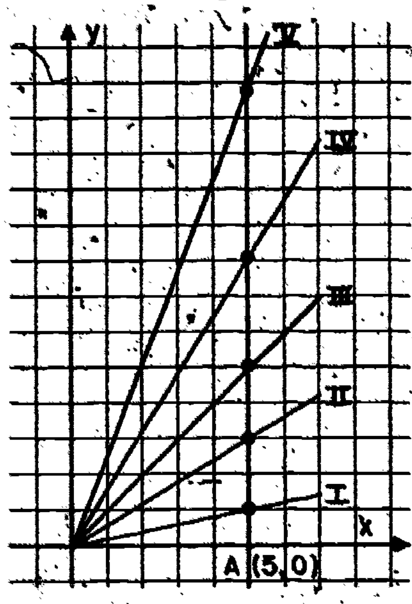
$$\frac{y}{x} = 2 \text{ ó } y = 2x$$

Si la tangente del ángulo es $\frac{4}{3}$, entonces,

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{3} \quad ó \quad y = \frac{4}{3}x.$$

Cada punto de la recta representada por esta ecuación tendrá coordenadas que satisfacen a la ecuación, y cada punto cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación estará sobre la recta. El número que aparece en esta ecuación se llama pendiente de la recta. En la ecuación $y = 2x$, el 2 es la pendiente. En la ecuación $y = \frac{4}{3}x$, el $\frac{4}{3}$ es la pendiente, y en la ecuación $y = mx$, la m es la pendiente. La palabra "pendiente" es otro nombre para la tangente de un ángulo formado por un rayo particular y el eje de las abscisas.

La palabra "pendiente", cuando se usa para referirse a una colina, alude a lo escarpado de la misma. La pendiente de una colina se mide dividiendo la medida de la variación en elevación por la medida de la variación horizontal correspondiente. En la figura de la derecha los rayos se indican con numerales romanos. Las tangentes o pendientes de los ángulos que forman los rayos con el eje de las abscisas son las siguientes:

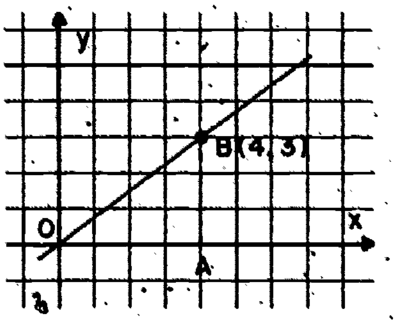


Para I, $m = \frac{1}{5}$; para II, $m = \frac{3}{5}$; para III, $m = \frac{5}{5}$; para IV, $m = \frac{8}{5}$;

y para V, $m = \frac{13}{5}$. A medida que y crece, la tangente del ángulo, o la pendiente, también crece. Cuanto más pendiente tiene el rayo, mayor es la tangente del ángulo.

Ejercicios de clase 9-4

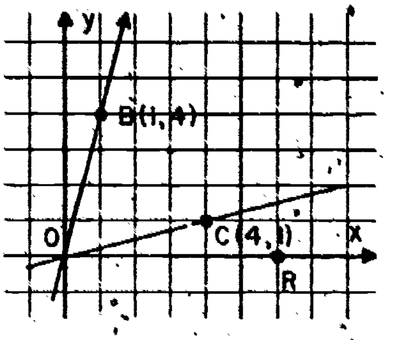
1. (a) En la figura de la derecha, ¿cuál es la tangente del ángulo que forma el rayo con el eje de las abscisas?



(b) Utiliza tu respuesta a la pregunta (a) para sustituir m en la ecuación general $y = mx$.

(c) Tu respuesta a (b) es una ecuación de la recta $\overleftrightarrow{OB}$.

2. (a) Escribe una ecuación para la recta que une el origen con el punto (4, 1).

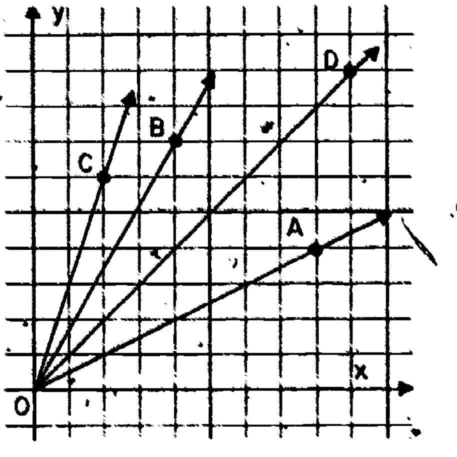


(b) Escribe una ecuación para la recta que une el origen con el punto (1, 4).

(c) ¿Cuál es la tangente del ángulo COR?

(d) ¿Cuál es la tangente del ángulo BOR?

3. Indica qué recta pasando por el origen está descrita por cada una de las ecuaciones que siguen. (Observa que algunas de las ecuaciones son equivalentes.)



(a) $y = 1x$

(b) $y = \frac{1}{2}x$

(c) $y = 3x$

(d) $y = \frac{7}{4}x$

(e) $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$

(f) $\frac{y}{x} = 1$

(g) $\frac{y}{x} = \frac{7}{4}$

(h) $\frac{y}{x} = \frac{3}{1}$

4. Usa la figura del problema 3 y calcula la pendiente de cada una de las siguientes rectas:

   (a) $\overleftrightarrow{OA}$ (b) $\overleftrightarrow{OB}$ (c) $\overleftrightarrow{OC}$ (d) $\overleftrightarrow{OD}$

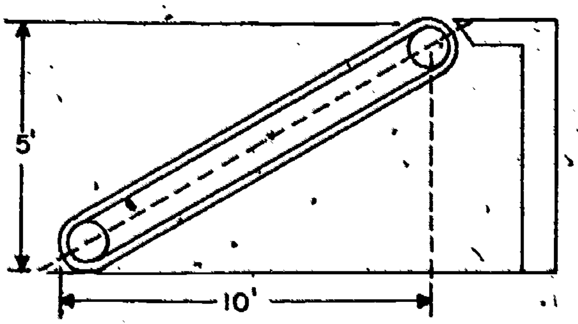
Hay otra razón que a veces se usa para designar la inclinación de una recta. Probablemente has oído decir "camino que tiene un gradiente de 2%". Esto se refiere a la razón $\frac{y}{r}$, es decir, al seno del angulo que forma el camino con la horizontal. Un camino que sube 2 pies por cada 100 pies medidos a lo largo del camino tiene un gradiente de 2%. Para caminos que no son muy escarpados, el gradiente tiene un valor muy próximo a la pendiente.

Ejercicios 9-4

1. Halla ecuaciones para las rectas que unen el origen con cada uno de los siguientes puntos:

(a) (4, 1)	(d) (1, 2)	(g) (5, 7)
(b) (3, 1)	(e) (1, 5)	(h) (6, 2)
(c) (1, 1)	(f) (5, 3)	(i) (5, 0)

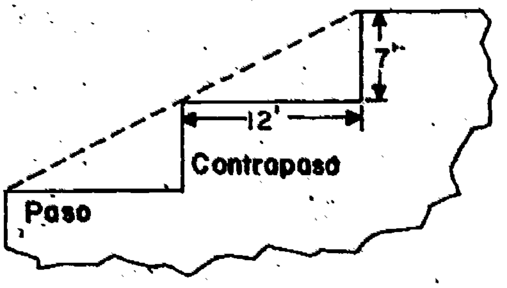
2. Una cinta transportadora se usa para "levantar" materiales a una plataforma de carga. Cada caja colocada sobre la cinta transportadora sube 5 pies mientras se mueve una distancia horizontal de 10 pies.



   (a) ¿Cuál es la pendiente del camino que sigue la caja?

   (b) ¿Cuál es la medida aproximada del ángulo que el camino seguido por la caja forma con la horizontal?

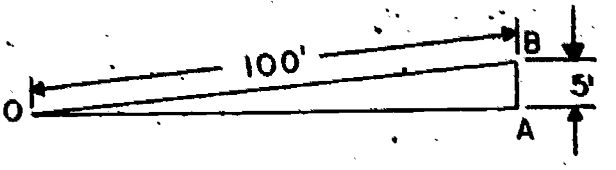
3. La figura de la derecha es una vista parcial de perfil de una escalera. La pendiente de la escalera se define como la pendiente de la recta de trazos.



(a) ¿Cuál es la pendiente de esta escalera?

(b) ¿Cuál es la amplitud aproximada del ángulo formado por la recta de trazos y la línea horizontal (paso)?

4. El dibujo de la derecha muestra un "gradiente" de 5%. Es decir, en una distancia de 100 pies hay una elevación de 5 pies. La distancia horizontal en este caso es aproximadamente 100 pies. Realmente es un poco menor que esta distancia.



(a) ¿Cuál es el seno del ángulo BOA?

(b) ¿Cuál es la tangente del ángulo BOA?

(c) ¿Cuál es la amplitud aproximada del ángulo BOA?

(d) ¿Cuál es la pendiente aproximada de $\overleftrightarrow{OB}$?

5. Usando la figura del problema 4, supón que la amplitud de $\angle$ BOA es 2°.

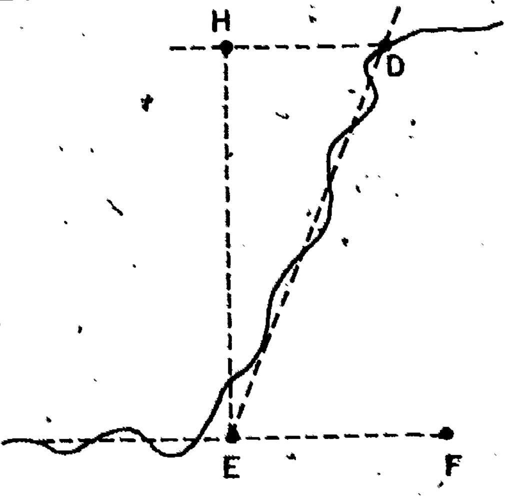
(a) ¿Cuánto es sen $\angle$ BOA?

(b) ¿Cuánto es tg $\angle$ BOA?

(c) ¿Cuál es la medida aproximada de la elevación si la distancia horizontal es 100 pies?

(d) ¿Cuál es el gradiente de $\overleftrightarrow{OB}$?

6. En la figura de la derecha, una ladera de la colina es aproximadamente $\overleftrightarrow{DE}$. La tangente de $\angle$ DEF es aproximadamente 2,05.



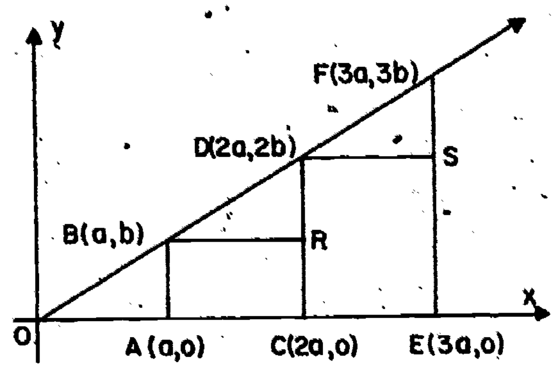
(a) ¿Cuál es la amplitud aproximada de $\angle$ DEF?

(b) ¿Cuál es la altura vertical aproximada de la

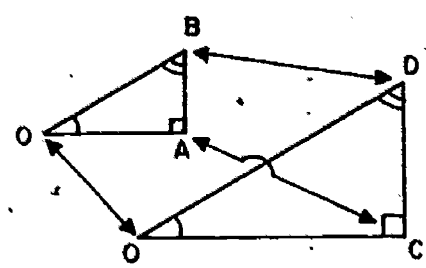
colina si la longitud de $\overline{DH}$ es aproximadamente 500 pies?

9-5. Triángulos semejantes

Refiriéndonos al dibujo de la derecha, que es una copia del dibujo que usamos en los Ejercicios de clase 9-1b, recuerda que los triángulos AOB, RBD y SDF son congruentes.



Observa los triángulos AOB y COD que no son congruentes, pero tienen entre sí algunas relaciones. Podemos establecer una correspondencia biunívoca entre los vértices de los dos triángulos como se muestra a la derecha. Los siguientes ángulos también se corresponden:



$$\angle AOB \longleftrightarrow \angle COD;$$
$$\angle OAB \longleftrightarrow \angle OCD;$$
$$\angle OBA \longleftrightarrow \angle ODC.$$

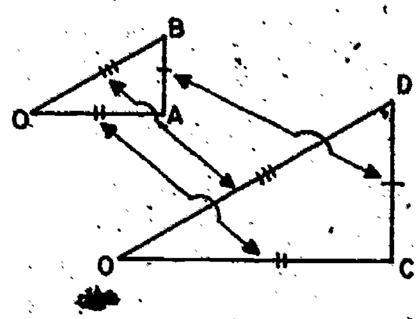
Debido a que los triángulos AOB y COD son rectángulos, sabemos que los ángulos correspondientes con vértices en A y en C son congruentes. Los ángulos correspondientes con vértices en O son el mismo ángulo, y entonces $\angle AOB \cong \angle COD$. Como $\Delta AOB \cong \Delta RBD$, los ángulos correspondientes con vértices en B y D son congruentes. Los ángulos correspondientes de estos dos triángulos son, pues, congruentes.

En vista de la correspondencia entre los vértices, tenemos la siguiente correspondencia entre los lados:

$\overline{OA} \longleftrightarrow \overline{OC}$

$\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{CD}$

$\overline{OB} \longleftrightarrow \overline{OD}$

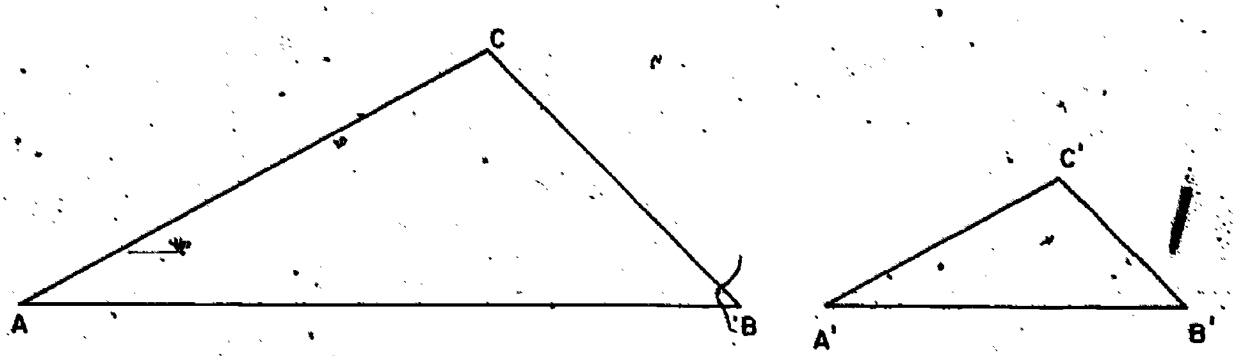


No parece que estos lados correspondientes son congruentes. Sin embargo, sabemos que la medida de $\overline{OA}$ es a, y que la medida de $\overline{OC}$ es 2a. También, la medida de $\overline{AB}$ es b, y la medida de $\overline{CD}$ es 2b. Con el teorema de Pitágoras se puede mostrar que la medida de $\overline{OD}$ es el doble de la medida de $\overline{OB}$. Entonces, cada uno de los lados de ΔCOD tiene longitud doble que el lado correspondiente de ΔAOB. Las razones de las longitudes de los lados correspondientes son iguales:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD} = \frac{1}{2}.$$

Expresamos esta relación diciendo que para estos dos triángulos "los lados correspondientes son proporcionales".

Hasta este momento hemos considerado solamente triángulos rectángulos. En la figura siguiente hay dos triángulos, ΔABC y $\Delta A'B'C'$.



Los ángulos correspondientes son congruentes; es decir,

$$\angle A \cong \angle A', \quad \angle B \cong \angle B' \quad \text{y} \quad \angle C \cong \angle C'.$$

Cada lado de ΔABC tiene longitud doble que el correspondiente lado de $\Delta A'B'C'$. Es decir,

$$AB = 2(A'B'),\quad AC = 2(A'C')\quad \text{y}\quad BC = 2(B'C').$$

Estos son ejemplos de lo que llamamos "triángulos semejantes".

<u>Definición</u>. Se dice que dos triángulos son <u>semejantes</u> si es posible definir una correspondencia biunívoca entre los vértices de manera que los ángulos correspondientes sean congruentes y las razones de las medidas de los lados correspondientes sean iguales (es decir, que los lados correspondientes sean proporcionales).

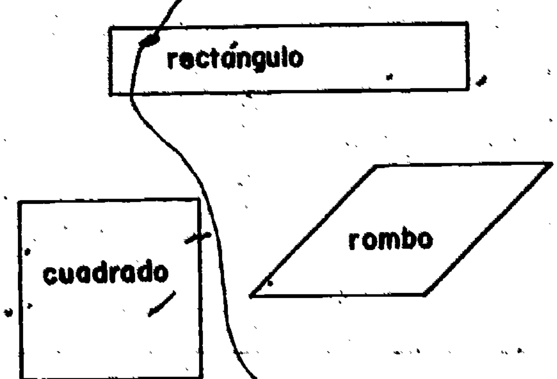
Esta definición significa que dos triángulos cualesquiera ABC y $A'B'C'$ son semejantes si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle C \cong \angle C'$

2. $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

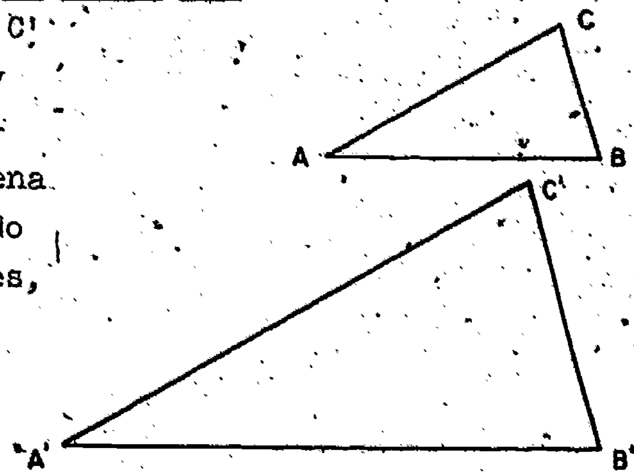
Es posible demostrar que si la condición 1 se cumple, la condición 2 debe cumplirse también, y que si la condición 2 se verifica, la condición 1 debe también verificarse. (Puedes tratar de demostrar que este enunciado es cierto.) Lo aceptaremos aquí sin demostración. Del enunciado se sigue que una de estas dos condiciones basta para definir triángulos semejantes.

Las únicas figuras semejantes que consideraremos en este capítulo son triángulos. Para otras figuras, tales como cuadrados y rectángulos, se necesitan ambas condiciones para establecer su semejanza. Por ejemplo, el cuadrado y el rectángulo de la derecha tienen ángulos congruentes, pero sus lados no son proporcionales. El cuadrado y el rombo tienen lados congruentes, pero no son semejantes.



Ejercicios de clase 9-5

1. Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes, siendo A y A', B y B', C y C' vértices correspondientes. Llena los espacios en blanco cuando te sea posible. Si no puedes, explica por qué.



(a) $m(\angle A) = 30$, $m(\angle B) = 75$, $m(\angle A') = ?$, $m(\angle B') = ?$

(b) $AB = 3$, $AC = 4$, $A'B' = 6$, $A'C' = ?$

(c) $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$, $A'B' = 5$, $B'C' = ?$, $A'C' = ?$

(d) $\frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$, $A'C' = 3$, $A'B' = ?$, $B'C' = ?$

(e) $m(\angle A) = 30$, $m(\angle B) = 73$, $m(\angle A') = ?$, $m(\angle C') = ?$

2. Averigua cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos. Justifica tus respuestas.

(a) Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es congruente con uno de los ángulos agudos de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son semejantes.

(b) Si dos lados de un triángulo son congruentes con dos lados de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

(c) Si $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$, entonces los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes.

(d) Si $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, entonces los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes.

(e) Si $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ y $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$, entonces los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes.

3. (a) Si los ángulos correspondientes de dos cuadriláteros son congruentes, ¿deben ser iguales las razones de las medidas de los lados correspondientes?

(b) Si son iguales las razones de las medidas de los lados correspondientes de dos cuadriláteros, ¿serán congruentes los ángulos correspondientes?

4. Supón que ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes, siendo $AB = 3$, $AC = 6$ y $BC = 7$. Determina las medidas de las longitudes de los dos lados restantes de $\Delta A'B'C'$, cuando la medida de un lado es la siguiente:

   (a) $A'B' = 6$

   (b) $A'C' = 2$

   (c) $B'C' = 5$

5. Sean ΔABC y ΔTSR dos triángulos tales que $\angle A \cong \angle T$, $\angle B \cong \angle S$ y $\angle R \cong \angle C$. ¿Serán semejantes los triángulos? Explica tu respuesta.

6. Supón que en el problema anterior sabemos solamente que $\angle A \cong \angle R$ y que $\angle B \cong \angle S$. ¿Serán los triángulos necesariamente semejantes? Explica tu respuesta.

Ejercicios 9-5

1. Dibuja un triángulo ABC. Sea D el punto medio del lado $\overline{AB}$ y E el punto medio del lado $\overline{AC}$. ¿Cuáles de los siguientes pares de razones son iguales? Justifica tus respuestas.

   (a) $\frac{AB}{AC}, \frac{AD}{AE}$ (b) $\frac{AB}{AD}, \frac{AC}{AE}$ (c) $\frac{AD}{DE}, \frac{AB}{BC}$ (d) $\frac{AD}{AC}, \frac{AB}{AE}$

2. ¿Serían tus respuestas al problema 1 diferentes si hubieras comenzado con un triángulo diferente de ΔABC? ¿Por qué sí o por qué no?

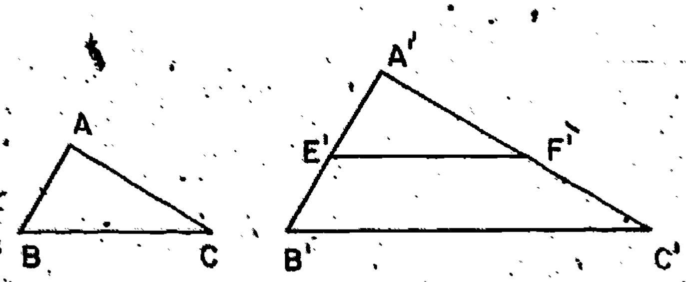
3. Dibuja un triángulo ABC y sea $\overline{DE}$ un segmento de recta paralelo a $\overline{BC}$, donde D está sobre $\overline{AB}$ y E está sobre $\overline{AC}$. Contesta en este caso a las preguntas del problema 1.

4. Supón que ABC es un triángulo rectángulo y que su ángulo en A tiene una medida en grados de 31. ¿Cuál es la medida del otro ángulo agudo?

5. Supón que ABC es un triángulo para el cual $m(\angle A) = 35$ y $m(\angle B) = 47$. Halla $m(\angle C)$.

6. Dibuja un triángulo ABC y toma un punto E sobre el lado $\overline{AB}$. Traza por E una paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ que interseque a $\overline{AC}$ en el punto D. Muestra que los triángulos ABC y AED son semejantes e indica qué ángulo en el triángulo AED corresponde a $\angle ABC$ del triángulo ABC.

7. Sean ABC y A'B'C' dos triángulos en los cuales los ángulos A y A' son congruentes, A'B' = 2(AB), A'C' = 2(AC). Sean E' y F' los puntos medios de los lados $\overline{A'B'}$ y $\overline{A'C'}$ del segundo triángulo. Muestra que el triángulo ABC es congruente con el triángulo A'E'F'. Aprovecha esta conclusión para demostrar que el triángulo A'B'C' es semejante al triángulo ABC.



8. Dibuja los triángulos ABC y A'B'C' como en el problema 7. Los ángulos A y A' son congruentes, pero A'B' = 3(AB), A'C' = 3(AC). Demuestra que los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes.

*9. Supón que ABC y A'B'C' son dos triángulos y que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

(a) Si se cumplen las igualdades y A'B' = 3(AB), muestra que A'C' = 3(AC) y B'C' = 3(BC).

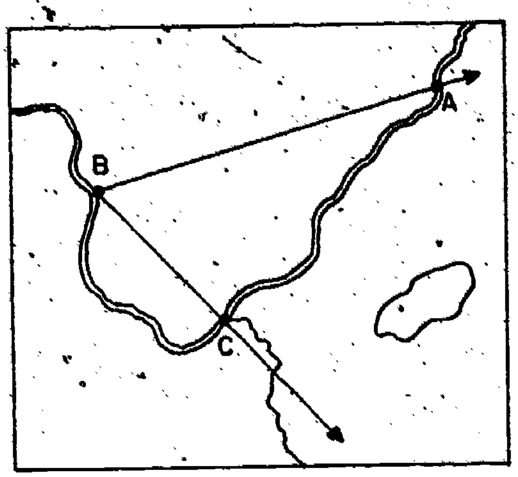
(b) Si se cumplen las igualdades y A'B' = s(AB), muestra que A'C' = s(AC) y B'C' = s(BC).

9-6. Dibujos a escala y mapas

En la sección anterior has aprendido a definir la semejanza de dos triángulos. Dos triángulos son semejantes si hay una correspondencia biunívoca entre sus vértices, tal que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

Ya estás familiarizado con los mapas. ¿Qué esperas de un mapa? Si es el mapa de un estado, por ejemplo, necesitas tener

una correspondencia biunívoca entre las ciudades importantes y los puntos del mapa. Es decir, cada ciudad debe ser representada por un punto particular del mapa como se muestra a la derecha. Además, los ángulos correspondientes deben ser congruentes. Es decir, si A, B y C son tres ciudades, el ángulo ABC sobre el terreno deberá ser congruente con el correspondiente ángulo ABC sobre el mapa.



¿Deberán ser iguales las distintas correspondientes? Esto sería mucho pedir, pues entonces el mapa resultaría demasiado grande. Pero si la distancia entre las ciudades A y B es el doble de la distancia entre las ciudades B y C, entonces la distancia correspondiente sobre el mapa, AB, deberá ser el doble de la distancia correspondiente BC. Con otras palabras, las distancias correspondientes deben ser proporcionales de la misma manera que los lados de dos triángulos semejantes son proporcionales.

Como la tierra es una esfera, y hay colinas y valles, ningún mapa sobre una hoja de papel plana puede cumplir exactamente los requisitos que hemos establecido. En realidad, el tamaño de una ciudad no es habitualmente proporcional al tamaño del punto que la representa sobre el mapa. Tampoco son los anchos de las carreteras o de los ríos proporcionales a los anchos de las líneas que los representan. Sin embargo, nuestros mapas satisfacen con mucha aproximación los requisitos que hemos dado.

Has oído hablar de dibujos hechos a escala. Los dibujos hechos a escala son una especie de mapas. Tales dibujos deben representar con exactitud los ángulos en un plano. Puesto que tomar las distancias en el dibujo iguales a las distancias del objeto real haría el dibujo muy difícil de manejar debido a su tamaño, tomamos las distancias sobre el dibujo menores que las del objeto real. Pero conservamos las razones de las distancias sobre el dibujo iguales

a las razones de las distancias reales correspondientes en el objeto. Es decir, si una longitud sobre el objeto es el doble de otra longitud, entonces, sobre el dibujo, la correspondiente longitud debe ser el doble de la otra. Esta razón se llama la "escala". Supongamos que queremos hacer un dibujo y hacer que en él una pulgada corresponda a un pie sobre el objeto. Hemos escogido

$$\text{una pulgada} \longleftrightarrow \text{un pie}$$

como escala, y debemos cuidar de usarla en todo el dibujo. Tal escala se escribe habitualmente "una pulgada = un pie". Si hacemos el dibujo cuidadosamente, podemos medir las distancias sobre el dibujo y hallar con mucha aproximación las distancias correspondientes en el objeto mismo.

Para hacer un dibujo a escala, el primer paso es elegir una escala de manera que el dibujo quepa en el papel, pero que no sea demasiado pequeño. Supongamos que quieres dibujar a escala un campo de fútbol, es decir, la zona marcada con líneas, dentro de la cual se realiza el juego. Un campo de fútbol es un rectángulo de 300 pies de largo (es decir, 100 yardas) y 160 pies de ancho. Podríamos probar una escala de 0.1 cm. por pie; es decir, 0.1 cm. en el dibujo corresponderán a 1 pie sobre el campo. Entonces, en el dibujo a escala, o plano, el largo del campo estará representado por una distancia de 30 cm. Esta distancia es demasiado grande para una hoja corriente de cuaderno de notas, de manera que decidimos usar una escala "más pequeña". "Más pequeña" significa que emplearemos una distancia menor en el dibujo para representar un pie sobre el terreno. Tomamos una escala,

$$0.05 \text{ cm.} = 1 \text{ pie}$$

Esto podría escribirse como

$$1 \text{ cm.} = 20 \text{ pies}$$

Usando esta escala, el largo del campo de fútbol en el dibujo será

$$(0.05) \cdot (300) = 15.00, \text{ ó } 15 \text{ cm.}$$

ó

$$\frac{300}{20} = 15, \text{ lo que también es } 15 \text{ cm.}$$

De manera análoga, podemos multiplicar 160 por 0.05, (o dividir 160 por 20) y deducir que el ancho del campo estará representado en el dibujo por un segmento de 8 cm. de longitud.

Ejercicios de clase 9-6

1. Haz un dibujo a escala de un campo de fútbol. Usa la escala 0.05 cm. = 1 pie ó 1 cm. = 20 pies. El largo del campo en tu dibujo sería de 15 cm. y el ancho de 8 cm.
   (a) Dibuja una diagonal del campo y mide su longitud. ¿Cuál es su longitud en centímetros?
   (b) Usando tu escala, determina la medida de la distancia correspondiente sobre el campo de fútbol.
   (c) Verifica tus respuestas para (a) y (b) usando el teorema de Pitágoras.
2. Supón que estás haciendo un dibujo a escala de un campo de fútbol usando la escala $\frac{1}{16}$ plg. = 1 pie.
   (a) ¿Cuál sería la longitud del campo sobre el dibujo a escala? (Da tu respuesta con la aproximación de una décima de pulgada.)
   (b) ¿Cuál sería el ancho del campo en el dibujo a escala?
3. Para cada una de las siguientes escalas, ¿qué longitud tendrá en el dibujo el segmento de recta correspondiente a una medida de 50 pies?
   (a) $\frac{1}{2}$ plg. = 1 pie
   (b) 1 mm. = 1 pie
   (c) $\frac{1}{8}$ plg. = 1 pie
   (d) 1 plg. = 10 pies
   (e) $\frac{1}{4}$ plg. = 5 pies
   (f) 0.05 cm. = 1 pie
4. Sobre un dibujo a escala, la longitud de un segmento es 10 pulgadas. ¿Cuál sería la longitud del correspondiente segmento para cada una de las siguientes escalas?
   (a) 1 plg. = 10 pies
   (b) $\frac{1}{2}$ plg. = 1 pie
   (c) $\frac{1}{8}$ plg. = 1 pie
   (d) $\frac{1}{4}$ plg. = 2 pies
   (e) 1 plg. = 0.5 pie
   (f) $\frac{1}{2}$ plg. = 10 pies

Una ilustración en un diccionario puede indicar una escala de $\frac{1}{300}$. Análogamente, la escala de un mapa puede ser $\frac{1}{50000}$. La primera escala significa que una unidad de medida sobre la ilustración representa 300 unidades de medida en el objeto real. De igual manera, la segunda escala significa que una unidad de medida sobre el mapa representa 50,000 unidades de medida sobre el objeto real.

El dibujo de una ballena indica la escala $\frac{1}{300}$. La longitud de la ballena en la figura es aproximadamente $1\frac{1}{2}$ pulgadas. Esto significa que la longitud real de la ballena es aproximadamente $300 \cdot 1\frac{1}{2} = 450$, es decir, 450 pulgadas, ó $37\frac{1}{2}$ pies aproximadamente.

Un segmento de recta sobre un mapa tiene una longitud de 5 pulgadas. La escala del mapa es $\frac{1}{50000}$. ¿Cuál es la correspondiente longitud sobre la tierra?

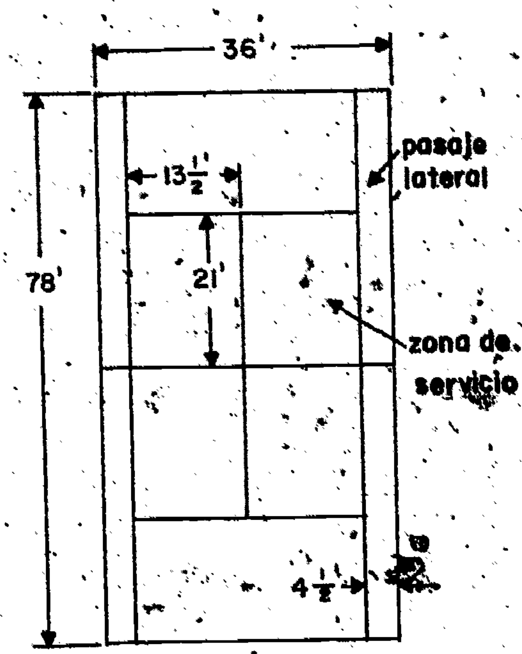
$$50{,}000 \cdot 5 = 250{,}000, \text{ es decir, } 250{,}000 \text{ pulgadas.}$$

Dividiendo 250,000 por 12 hallamos que la correspondiente distancia sobre la tierra tiene una longitud de 20,866.6 pies aproximadamente. Dividiendo esto por 5,280 nos resultan unas 3.9 millas.

Ejercicios 9-6.

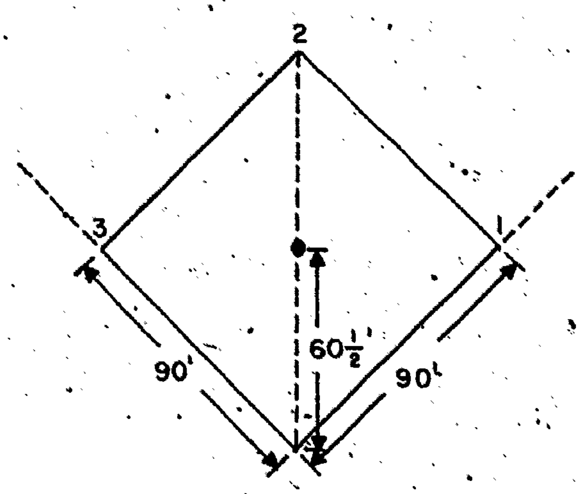
1. En un mapa se indica que $\frac{1}{4}$ de pulgada representa 50 millas. ¿Cuántas millas representan $4\frac{1}{4}$ pulgadas?
2. En un mapa se indica que $\frac{1}{8}$ de pulgada representa 25 millas. ¿Cuántas pulgadas tomarías para representar 750 millas?
3. El croquis de un terreno tiene la forma de un paralelogramo. Los lados más largos miden 92 pies y los más cortos 40 pies. Los ángulos agudos miden 70° y los obtusos 110°. Dibuja este terreno a escala, de manera que $\frac{1}{16}$ de pulgada represente 1 pie.
4. La ciudad B está 40 millas al este de la ciudad A y la ciudad C está 30 millas al norte de la ciudad B. Representando una milla por $\frac{1}{8}$ de pulgada, dibuja un mapa de esas distancias. ¿Cuántas millas hay de la ciudad A a la ciudad C, medidas en línea recta?

5. Dibuja a escala una cancha de tenis. Una cancha de tenis es un rectángulo que tiene 78 pies de largo y 36 pies de ancho. Los pasajes laterales tienen $4\frac{1}{2}$ pies de ancho. Las zonas de servicio tienen 21 pies de largo y $13\frac{1}{2}$ pies de ancho. Toma $\frac{1}{8}$ de pulgada para representar 1 pie.



6. La escala de un mapa es $\frac{1}{1200000}$. ¿Qué longitud sobre la tierra está representada por un segmento de recta que en el mapa tiene 1 pulgada de longitud? Da la respuesta con la aproximación de una décima de milla.

7. Un campo reglamentario de béisbol tiene la forma de un cuadrado cuyo lado mide 90 pies de largo. El puesto del lanzador está colocado a $60\frac{1}{2}$ pies del plato ("home plate") sobre una recta que pasa por el plato y la segunda base. Haz un dibujo a escala del campo de béisbol indicando el puesto del lanzador con un punto. Efectúa mediciones sobre tu dibujo para contestar a las siguientes preguntas.



(a) ¿Cuál es la distancia aproximada del puesto del lanzador a la segunda base? (Mide hasta el vértice del ángulo en la segunda base.)

(b) Si una persona corre directamente de la primera a la tercera base, ¿a qué distancia mínima del puesto del lanzador pasa?

(c) Si el jardinero corto está en el punto medio del segmento que une la segunda base con la tercera, ¿a qué distancia aproximada está del plato?

(d) Si un jugador corre de la tercera base al plato, ¿cuál es la medida de la mínima distancia al puesto del lanzador?

8. Desde dos puntos distintos A y B de la bahía se ve un barco. La distancia entre A y B es 100 pies. Si S representa el punto en que está el barco, se miden los siguientes ángulos, en grados:

$$m(\angle SAB) = 30 \quad \text{y} \quad m(\angle SBA) = 70$$

Haz un dibujo a escala tomando AB = 5 pulgadas.

(a) ¿Por qué es el triángulo que has dibujado semejante al triángulo ABS?

(b) Midiendo sobre tu dibujo, halla las distancias aproximadas al barco desde los puntos A y B.

9. Supón que A, B y C representan tres ciudades separadas por las siguientes distancias:

AB = 100 millas, AC = 75 millas y BC = 60 millas.

La ciudad C está directamente al oeste de la ciudad A, y la ciudad B está al norte de la recta $\overleftrightarrow{AC}$. Haz un dibujo a escala tomando 1 pulgada para representar 20 millas.

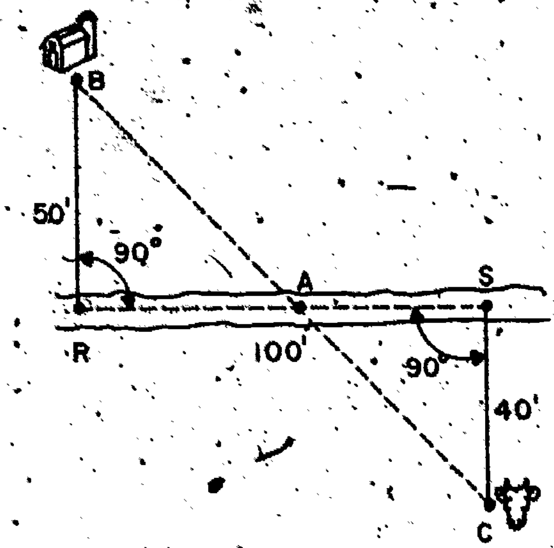
(a) ¿Cuáles son las distancias que en tu dibujo a escala corresponden a $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$?

(b) ¿Cuál es la amplitud aproximada del ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, ($\angle BAC$), en tu dibujo?

(c) Determina la dirección aproximada de la ciudad A a la ciudad B.

10. Si en los problemas anteriores se hubiera tomado una escala en que 1 pulgada corresponde a 10 millas, ¿cuáles habrían sido tus respuestas para (a)? ¿Y para (b) y (c)?

11. Una vaca y un granero están en lados opuestos de un arroyo que fluye en línea recta. Supón que la vaca está a 40 pies del arroyo y que el granero está a 50 pies del arroyo, estando medidas estas distancias perpendicularmente al arroyo. Supongamos que hay 100 pies de distancia entre los puntos del arroyo de los cuales se han medido las dos distancias anteriores. Haz un dibujo a escala y úsalo para hallar las siguientes distancias:



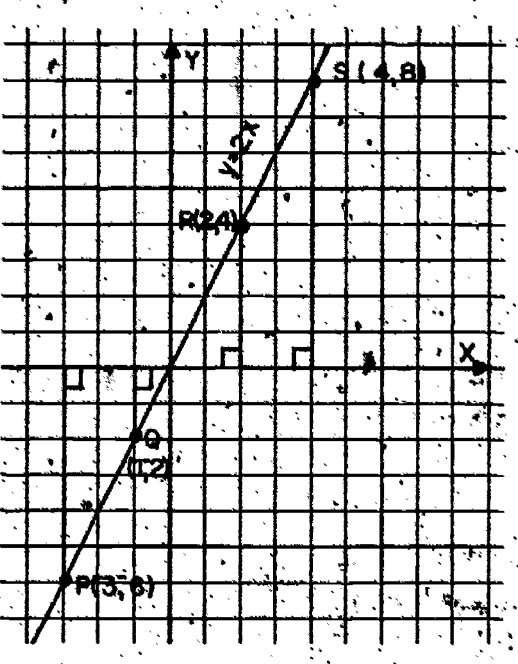
(a) La longitud aproximada del camino más corto entre la vaca y el granero, o sea, de B a C.

(b) Si este camino cruza el arroyo en A, halla las distancias de S a A y de A a R.

*12. Inventa un método para resolver el problema 9 sin dibujos a escala y luego verifica tus respuestas.

9-7. Clases de variación

Al comienzo de este capítulo has estudiado la semejanza de triángulos rectángulos. En la figura de la derecha se muestra la gráfica de la ecuación $y = 2x$; de los puntos P, Q, R y S, se bajan perpendiculares al eje de las abscisas formando cuatro triángulos rectángulos semejantes. Para cada uno de esos triángulos, la razón de la ordenada a la abscisa es $\frac{2}{1}$. Entonces, la pendiente de la recta es 2. Para cada punto de esta gráfica hay una relación entre la ordenada y la abscisa, y tal relación se expresa mediante la ecuación



$$y = 2x$$

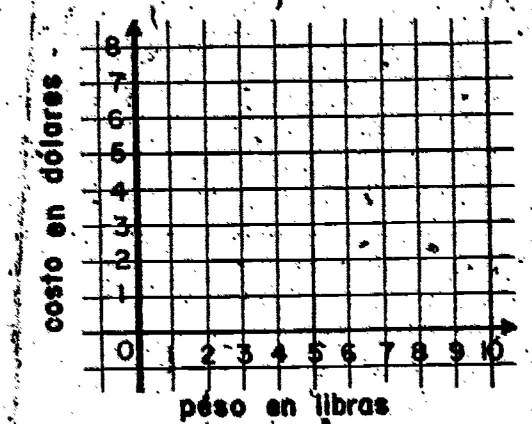
Para cada par ordenado correspondiente a un punto de la gráfica, la ordenada es dos veces la abscisa. Vemos que estas dos coordenadas están relacionadas de una manera particular. En el mundo que te rodea hay muchas situaciones en las cuales dos cantidades están relacionadas. Cuando compras nueces, el monto de lo que pagas depende de dos factores: de la cantidad que compras y del precio de las nueces. Si cuelgas una masa en una balanza de resortes, la distancia que se estira el resorte se relaciona con la resistencia del resorte y el peso de la masa.

Ejercicios de clase 9-7

1. Supón que la libra de nueces cuesta \$0.60. Haz una tabla en que se muestre el costo de varias cantidades de nueces, como se ve a continuación:

Cantidad en libras	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Costo en dólares											

Ahora haz una gráfica para mostrar cómo el costo se relaciona con el peso. Sea w el peso en libras (eje de las abscisas) y c el costo en dólares (eje de las ordenadas) como se muestra a la derecha.

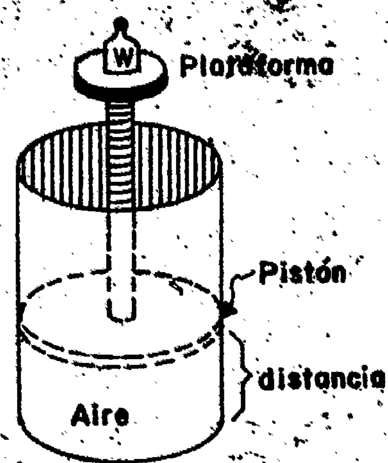


(a) Si se compra mayor cantidad de libras, ¿qué pasa con el costo?

(b) ¿Cuál es la pendiente de la recta?

(c) Escribe una ecuación que exprese la relación entre la ordenada y la abscisa para cada punto de la recta.

2. A la derecha hemos dibujado un cilindro que está lleno de aire. Se puede comprimir el aire mediante la presión ejercida por un pistón y un peso colocado sobre la plataforma P. El volumen ocupado por el aire depende de la magnitud de la presión, la cual a su vez depende del peso que hay en P. Se colocan masas de varios pesos en la plataforma P y mediante un manómetro se mide la presión p, en libras por pulgada cuadrada, del aire dentro del cilindro. En cada medida se toma la distancia del pistón al fondo y se determina el volumen v del aire contenido en el cilindro. He aquí una tabla que muestra los resultados:

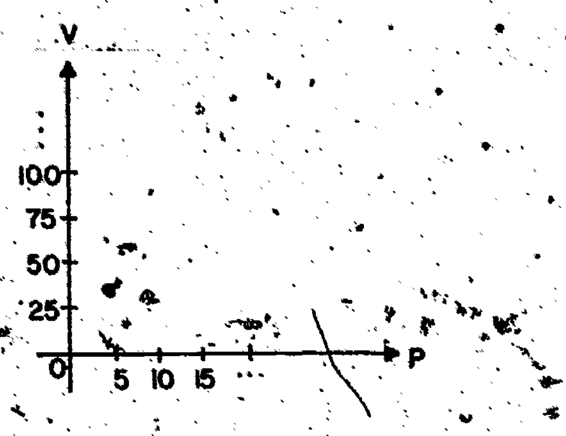


p	15	20	25	30
v	250	187.5	150	125

Haz una gráfica para mostrar la relación entre p y v, y úsala para responder a las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuál sería la medida del volumen si p = 40?

(b) A medida que el peso aumenta, ¿qué pasa con el volumen del aire?



(c) Si la presión fuera 10, ¿cuál sería la medida del volumen?

(d) A medida que el volumen aumenta, ¿qué pasa con la presión?

En estos dos ejemplos de las muchas formas en que se pueden relacionar dos cantidades, has visto que cuando una de las cantidades cambia, la otra también cambia en cierta forma definida. Los matemáticos dicen que una cantidad "varía" cuando esa cantidad cambia. En el resto de este capítulo estudiaremos algunas de las propiedades más simples referentes a cambios. Esas propiedades se llaman a veces <u>leyes de variación</u>.

<u>Ejercicios 9-7</u>

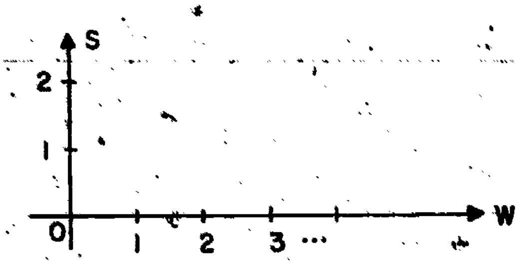
1. En la tabla que sigue se dan los alargamientos de un resorte cuando se cuelgan de él masas de varios pesos. Construye una gráfica que muestre la relación entre el peso w en libras y el alargamiento s en pulgadas.

Peso en libras	0	1	2	3	4
Alargamiento en pulgadas	0	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	3

(a) A medida que w crece, ¿qué pasa con s?

(b) A medida que s crece, ¿qué pasa con w?

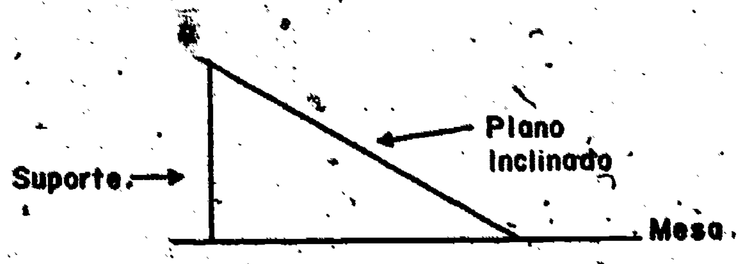
(c) ¿Cuál podría ser la medida de s si la medida de w es 8?



2. En un plano inclinado formado por una tabla dispuesta como se indica en la figura, se ha marcado una escala en pulgadas,

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

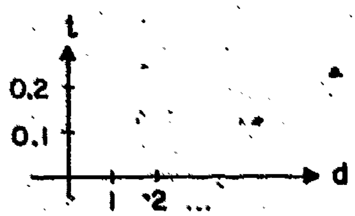
comenzando por el borde inferior.



Supón que se coloca una bolita a varias distancias del borde inferior y que mediante un cronómetro se miden los tiempos que emplea la bolita para llegar hasta el borde inferior. He aquí una tabla de los resultados, con las medidas de tiempo dadas con la aproximación de $\frac{1}{10}$ de segundo:

d	(medida de la distancia en pulgadas)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	(medida del tiempo en segundos)	0.1	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.6

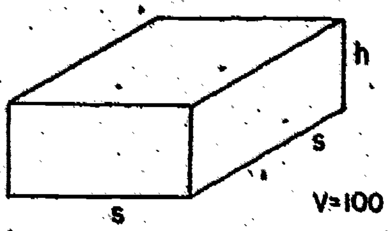
Haz una gráfica que muestre la relación entre d y t.



(a) Cuando la medida de d varía (cambia), ¿varía también la medida de t? Explica tu respuesta.

(b) ¿Puedes predecir cuánto tiempo tardaría la bolita para rodar 12 pulgadas?

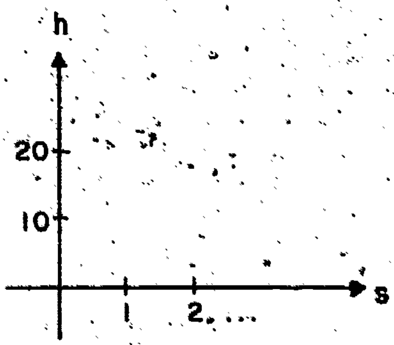
3. Considera una caja de base cuadrada cuyo volumen es 100 pulgadas cúbicas. Haz una tabla que muestre la relación entre la medida s de la longitud del lado de la base y la medida h de la altura.



s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h										

(a) Haz una gráfica que muestre la relación entre s y h.

(b) Da una fórmula que exprese h en términos de s.

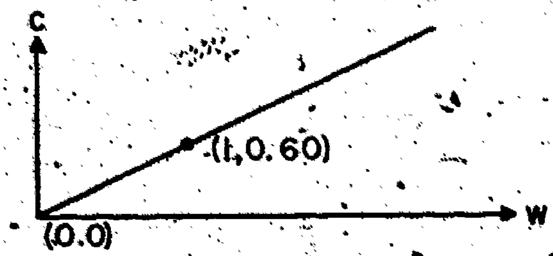


9-8. Variación directa

En el problema 1 del último conjunto de ejercicios, ¿cómo hallarías el costo de 15 libras de nueces? Naturalmente, podrías decir así: "Una libra de nueces cuesta 0.60 de dólar. Para hallar el costo de 15 libras debo ________ (¿sumar, restar, multiplicar o dividir?) el costo por libra por el número de libras. La respuesta es ________. (¿Cuánto es?)" Puedes expresar este procedimiento de cálculo por medio de la ecuación

c = (0.60) ________ (¿Qué operación debe efectuarse?).

Cuando dibujaste la gráfica de esta relación, obtuviste una línea recta que pasa por el origen:



¿Cuál es la ecuación de esta recta? ¿Cuál es la pendiente de esta recta? Si aumentas la cantidad que compras en 10 libras, ¿cuánto aumentará el costo? ¿Cuál es la variación en el costo por cada unidad de variación en el peso?

Decimos que c varía directamente con w, o que el costo es proporcional al peso. En esta relación, la razón de la medida del costo a la medida del peso es siempre 0.60. Debido a que este número no cambia, lo llamamos una constante. Decimos que 0.60 es la constante de proporcionalidad.

Si tu padre conduce el automóvil a lo largo de una carretera recta a la velocidad de 50 millas por hora, ¿qué distancia recorre en una hora? ¿Y en 2 horas? ¿Y en 3.5 horas? ¿Y en t horas? La medida d de la distancia recorrida se da en términos de la medida t del tiempo, por la fórmula

$$d = 50t$$

Vemos que la medida de la distancia es una constante multiplicada por la medida del tiempo. La razón $\frac{d}{t}$ de la medida de la distancia recorrida a la medida del tiempo es constante. La distancia varía directamente con el tiempo. Podemos también decir que la distancia es proporcional al tiempo. La constante de proporcionalidad es 50.

En la gráfica de la ecuación $y = 2x$, la ordenada de un punto sobre la gráfica es una constante multiplicada por la abscisa. Con otras palabras, y varía directamente con x. Podemos también decir que la ordenada es proporcional a la abscisa, y que la constante de proporcionalidad es 2, que es la pendiente de la recta.

Ejercicios de clase 9-8

1. De acuerdo con la ley de Hooke de la elasticidad, el alargamiento de un resorte es proporcional al peso del objeto que se cuelga de él. Supón que sabes que cuando de ese resorte se cuelga una masa cuyo peso es 2 libras, el alargamiento es 3 pulgadas. ¿Cuál será el alargamiento producido por un objeto que pesa 5 libras?

   (a) Podemos expresar la ley de Hooke por medio de la ecuación

   $$s = k \cdot w$$

   en que k es una constante de proporcionalidad,

   s es la medida del alargamiento del resorte en pulgadas,

   w es la medida del peso en libras.

   Reemplazando s y w por 3 y 2 respectivamente, la ecuación se escribe,

   $$3 = k \cdot 2$$

   Resuélvela para hallar la constante de proporcionalidad, k.

   (b) Reemplaza la k de la ecuación $s = k \cdot w$ por la respuesta que has encontrado en (a) y resuelve la ecuación para hallar s cuando $w = 5$.

   (c) Copia y completa la siguiente tabla usando tu respuesta para (a) como constante de proporcionalidad.

w	0	1	2	3	4	5
s						

   (d) ¿Varía la medida de s directamente con la medida de w?

2. Supón que el costo de la gasolina es 32 centavos por galón.

   (a) Escribe una ecuación en términos matemáticos para mostrar el costo total en centavos, t, de n galones de gasolina.

   (b) Escribe una ecuación que muestre el costo como número de dólares, d, para n galones de gasolina a 32 centavos por galón.

(c) ¿Varía la medida de t directamente con la medida de n?
(d) ¿Varía la medida de n directamente con la medida de t?
(e) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en este problema?

Ejercicios 9-8

1. (a) Redacta una proposición en términos matemáticos que dé el costo total, t centavos, de n galones de gasolina a 33.9 centavos por galón.
   (b) En este enunciado puede también ponerse el costo como d dólares. Escribe la proposición de una segunda manera, usando d dólares.
2. (a) Si tu paso es normalmente de unos 2 pies, ¿cuánto recorrerás en n pasos?
   (b) Usa d pies para la distancia total y escribe la fórmula.
   (c) Si n crece, ¿puede decrecer d al mismo tiempo?
3. (a) Escribe una fórmula para el número i de pulgadas en f pies.
   (b) A medida que f decrece, ¿qué pasa con i?
4. Establece el valor de la constante, k, en cada una de las ecuaciones que has escrito para los problemas 1 a 3.
5. ¿Puedes escribir la ecuación del problema 2 en la forma $\frac{d}{n} = 2$? ¿Qué restricción habrá que hacer sobre n?
6. Halla k si y varía directamente con x, e y es 6 cuando x es 2.
7. Halla k si y varía directamente con x, e y es $^{-}3$ cuando x es $^{-}12$.
8. (a) Algunas veces se necesita escribir una ecuación a partir de un conjunto de valores. Por la información de la tabla adjunta, ¿parece que a varía directamente con b? ¿Por qué?

a	b
20	2
50	5
$^{-}70$	$^{-}7$
100	10
$^{-}110$	$^{-}11$

   (b) ¿Qué ecuación podría relacionar a a y b?

9. Supón que d varía directamente con t y que cuando t es 6, d es 240. Escribe la ecuación que relaciona a d y t.

10. (a) Usa la relación $y = \frac{3x}{2}$ para llenar los espacios en blanco de los siguientes pares ordenados: $(^-4, \ )$; $(^-3, \ )$; $(^-2, \ )$; $(^-1, \ )$; $(0, \ )$; $(2, \ )$; $(5, \ )$.

(b) Marca los puntos en papel cuadriculado.

11. (a) En la relación del problema 10, cuando el número x se duplica, ¿se duplica también el número correspondiente y?

(b) Cuando x se divide por 2, ¿qué pasa con y?

(c) Cuando se multiplica el número y por 10, ¿qué pasa con el número correspondiente x?

(d) ¿Son verdaderos tus enunciados para valores negativos de x e y?

12. (a) En la ecuación $y = kx$, ¿qué pasa con el número x si y se divide por 2?

(b) ¿Qué pasa con y si x se triplica?

13. (a) Da un ejemplo de variación directa cuando la constante de proporcionalidad es un número grande.

(b) Da otro ejemplo cuando $1 > k > 0$.

9-9. Variación inversa

Supón que tienes 12 cuartillos de ponche para una fiesta, y que quieres ser perfectamente justo con tus invitados y servir a cada uno de ellos exactamente la misma cantidad. ¿Cómo varía la cantidad para cada invitado con el número n de invitados? Por ejemplo, si el número de invitados se duplica, ¿cuál es la variación en la cantidad que recibe cada uno de ellos? Sea q el número de cuartillos de ponche por invitado. Entonces, la cantidad total de ponche, que es 12 cuartillos, es igual a

(número de cuartillos por invitado) · (número de invitados).

La relación entre q y n puede expresarse mediante la ecuación,

$$q \cdot n = 12$$

donde la constante de proporcionalidad es 12.

A continuación se muestra una tabla de valores para la ecuación $q \cdot n = 12$. Para comparación, se muestra también una tabla de valores para la ecuación $y = 3 \cdot x$. Verifica las tablas y compara los valores indicados.

$q \cdot n = 12$

q	1	2	3	4	5	6
n	12	6	4	3	$\frac{12}{5}$	2

$y = 3 \cdot x$

x	1	2	3	4	5	6
y	3	6	9	12	15	18

En la tabla de valores para $y = 3 \cdot x$, y crece cuando x crece. En realidad, hay una relación más definida: si se duplica cualquier valor para x, también se duplica el valor correspondiente para y; si se triplica un valor para x, también se triplica el valor para y. Si cualquiera de los valores de x se multiplica por cualquier número, el correspondiente valor para y queda multiplicado por el mismo número. Esto es lo que queremos decir con "y varía directamente con x". Este es, pues, un ejemplo de variación directa.

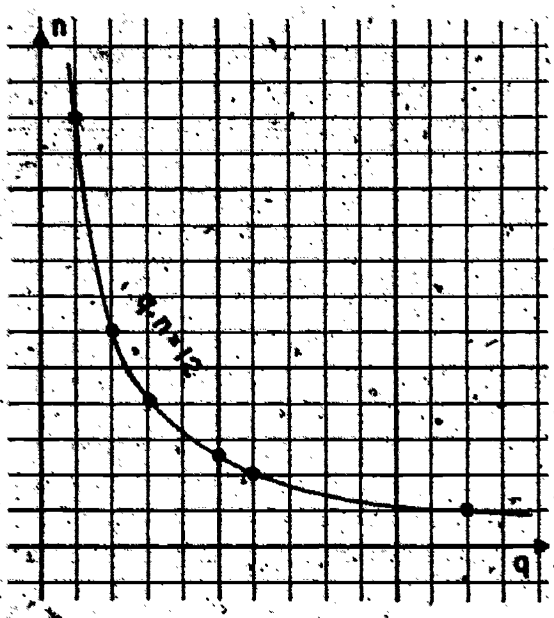
La primera tabla de valores es muy diferente. En ella, n decrece cuando q crece. Hay una relación más definida: si se duplica cualquier valor para q, entonces el correspondiente valor para n queda dividido por 2; si se triplica cualquier valor para q; el correspondiente valor para n queda dividido por 3. Si un valor para q se multiplica por cualquier número, el valor correspondiente para n queda dividido por el mismo número. Expresamos la relación $q \cdot n = 12$ diciendo:

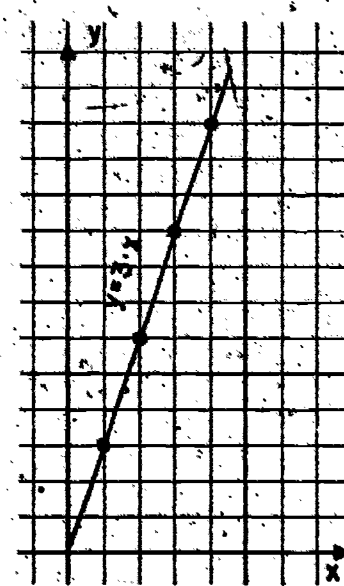
"q varía inversamente con n".

Otra manera de decir lo mismo es:

"q es inversamente proporcional a n".

A continuación se muestran las gráficas para $q \cdot n = 12$ e $y = 3 \cdot x$, para valores positivos de q, n, y y x. Observa que todo lo que hemos dicho anteriormente se muestra en las gráficas.





Ejercicios 9-9

1. (a) En la tabla siguiente, se muestran dos posibles maneras en las cuales puede recorrerse una distancia de 100 millas. Copia y completa la tabla.

Velocidad (millas por hora)	10	20	25	50	60	75	80	100
Tiempo (horas)	10	5						

(b) Usando v para el número de millas por hora, t para el número de horas, y tomando los datos de (a), escribe una ecuación que conecte a v, t y 100.

(c) Cuando la velocidad se duplica, ¿cuál es el efecto en el correspondiente valor del tiempo?

(d) Cuando t crece en $vt = 100$, ¿qué pasa con v?

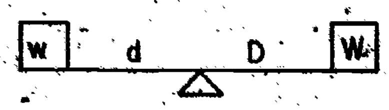
2. (a) Supón que tienes 240 losetas para el piso de un patio y puedes disponerlas en hileras de una variedad de maneras para hacer pisos rectangulares. Si s representa el número de losetas en una hilera y n el número de hileras, ¿cuáles son las posibilidades? Copia y completa una tabla como la siguiente:

Número total de losetas: 240

Número de losetas en una hilera	10	12	15	16	30	40
Número de hileras	24					

(b) Escribe una ecuación que conecte a n, s y 240. (Si no puedes cortar ninguna de las losetas, ¿cómo deben ser los números n y s?)

3. (a) Un balancín estará en equilibrio si wd = WD cuando un objeto que pesa w libras está a d pies del apoyo y otro objeto que pesa W libras está a D pies del apoyo. Si WD = 36, halla D cuando W es 2, 9 ó 18 y halla W cuando D es 1, 6 ó 12.



(b) ¿Qué puedes decir sobre los valores de W cuando D se duplica, si wd permanece constante? Si se reemplazan valores crecientes para W, ¿qué puedes decir sobre los valores correspondientes de D, suponiendo que wd permanece constante?

4. Escribe una ecuación que conecte el tipo de interés r y el número de dólares en depósito, p, con un interés fijo de $200 por año. Comenta la manera en que los valores correspondientes de r resultan afectados cuando se sustituyen diversos valores para p. Si se duplicara el tipo de interés, ¿qué excedente de dinero habría en el depósito si éste debe dar $200 de intereses por año?

5. Da la constante de proporcionalidad de cada uno de los problemas 1 a 4.

6. ¿Cuál es la diferencia entre la variación directa y la variación inversa?

7. Halla k si y varía inversamente con x y si y es 6 cuando x es 2.

8. Halla k si x varía inversamente con y y si y es 10 cuando x es $\frac{1}{2}$.

9. De la información de la tabla, ¿parece que a varía inversamente con b? Explica tu respuesta.

a	$^{-}4$	$^{-}1$	1	3	8	19	41
b	$^{-}8$	$^{-}2$	2	6	16	38	82

10. Estudia los siguientes pares de números: $(^{-}2, 8)$; $(^{-}1, 2)$; $(0, 0)$; $(1, 2)$; $(2, 8)$; $(3, 18)$; $(4, 32)$.
(a) ¿Parece que y varía directamente con x?
(b) ¿Parece que y varía inversamente con x?

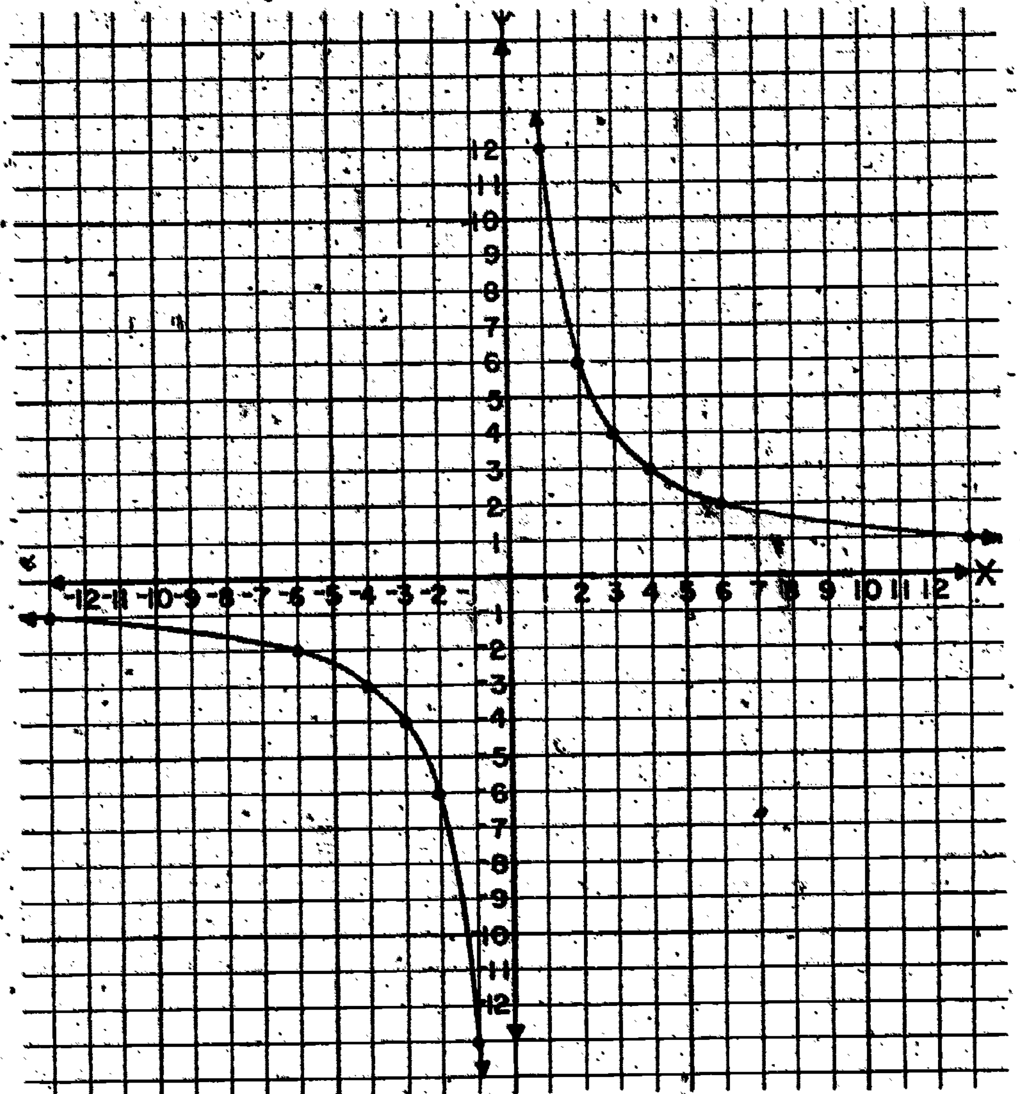
11. (a) En la siguiente tabla llena los espacios en blanco si $xy = 18$.

x	$^{-}4$	$^{-}3$	$^{-}2$	$^{-}1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	18
y														

(b) ¿Es posible que x ó y sea cero en $xy = 18$? ¿Por qué?

(c) Marca en papel cuadriculado los puntos cuyas coordenadas has hallado en (a) y dibuja la curva. Será mejor que halles más pares de números para que puedas dibujar la curva con mayor facilidad. ¿Se parece tu curva a la que damos a continuación de (d)?

(d) Probablemente has encontrado esta curva en el séptimo grado, relacionada con la palanca, o la balanza. La curva, de la cual tu gráfica es una porción, se llama hipérbola. Tiene dos ramas. Una hipérbola indica variación ________.



12. Dibuja la gráfica de $xy = 6$ en papel cuadriculado.

Observa que en el estudio de las variaciones directa e inversa, se pueden intercambiar las letras x <u>e</u> y. En $y = kx$, si k no es cero, decimos que x varía directamente con y, <u>y</u> que y varía directamente con x. En $xy = k$, k no puede ser cero y decimos que x varía inversamente con y ó que y varía inversamente con x. En estos enunciados x <u>e</u> y pueden representar diversos pares de números mientras k representa una constante, es decir, un número fijo. En la ecuación general se usa la letra k en vez de un numeral particular, a fin de incluir todos los casos posibles.

Como es $x \neq 0$, la ecuación $xy = k$ puede escribirse $y = k \cdot \frac{1}{x}$ indicando que y varía directamente con el inverso de x.

Ocasionalmente puedes ver la variación directa representada por el enunciado $\frac{y}{x} = k$. Algunas veces esta forma es útil, pero por tus estudios del número cero sabes que $\frac{y}{x} = k$ excluye la posibilidad de que x sea cero.

Las gráficas de $y = kx$ y de $xy = k$ incluyen puntos con coordenadas negativas. En algunos problemas no tiene sentido que x ó y sean negativos. En el problema en que servías ponche a tus invitados, el número n de invitados debe ser un número natural. En tales casos la ecuación no es una traducción completamente correcta de la relación en lenguaje matemático. La traducción correcta de tu problema del ponche en la fiesta es la proposición numérica que sigue:

(1) "$pn = 12$ y n es un número natural".

La traducción correcta de la ley de Boyle es:

(2) "$pv = k$ y $p > 0$, $v > 0$"

Cuando construyes la gráfica de la proposición numérica (1), obtienes un conjunto de puntos aislados en el primer cuadrante. La gráfica de la relación (2) es la rama de la hipérbola

$$pv = k$$

que está en el primer cuadrante.

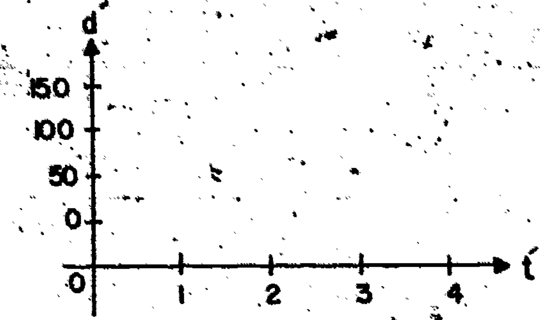
9-10. Otros tipos de variación (opcional)

Si construimos una tabla con las medidas de la distancia d en pies que recorre un objeto cuando cae partiendo de una posición inicial de reposo, en t segundos, obtenemos resultados como éstos:

t	0	1	2	3	4
d	0	16	64	144	256

Dibuja una gráfica de la relación entre d y t. Como los valores para d son grandes, podrías usar para el eje d una

unidad diferente de la que has usado para el eje t.



Obtienes una parte de una curva llamada parábola.

Si se duplica el número t, ¿por cuánto queda multiplicado el número d? Si t se triplica, ¿por cuánto queda multiplicado el número d? Como ves, d varía directamente con t^2. Podemos expresar la relación por medio de la ecuación

$$d = kt^2$$

donde k es constante. ¿Cuál es esta constante? ¿Qué distancia cae un objeto en 10 segundos?

Hace muchos años que Galileo descubrió esta ley. Comenzó con experimentos como los del plano inclinado. (V. problema 2 de la Sección 9-7.) De la tabla que hemos dado, sería difícil deducir esta ley. Se necesitarían mediciones más exactas para descubrirla.

Ejercicios 9-10a

1. (a) ¿Cuál es el área de cada una de las caras de un cubo cuyos lados tienen una longitud de 2 pulgadas? ¿Cuántas caras hay? ¿Cuál es el área total de su superficie (el área total de todas sus caras)?

   (b) Construye una tabla que muestre la relación entre las longitudes de cada lado de un cubo y el área de su superficie.

s	1	2	3	4	5	6
A						

2. Sea S la medida en centímetros cuadrados del área de un cuadrado cuyos lados miden e centímetros.
   (a) Determina una ecuación que conecte S con e.
   (b) Indica cómo varía S con e.
   (c) Dibuja la gráfica de la ecuación que has encontrado en (a). Toma para e valores de 0 a 15 y elige una escala conveniente para los valores de S.
   (d) En la gráfica que has dibujado en (c), determina
      (1) el área de un cuadrado cuyos lados miden 3 cm.
      (2) la longitud de los lados de un cuadrado cuya área es 64 $cm.^2$.
      (3) el área de un cuadrado cuyos lados miden 5.5 cm.
      (4) la longitud de los lados de un cuadrado cuya área es 40 $cm.^2$.
   (e) Utilizando la ecuación que has encontrado en (a), calcula
      (1) el área de un cuadrado cuyos lados miden 3 cm.
      (2) el área de un cuadrado cuyos lados miden 5.5 cm.
3. Para cada una de las observaciones del problema 2 de los Ejercicios 9-7, calcula la razón $\frac{d}{t^2}$. Halla la media de esas razones. Dibuja la gráfica de la ecuación
$$d = kt^2$$
   Usa para k el valor medio de las razones $\frac{d}{t^2}$ que acabas de calcular, y marca los puntos que representan las observaciones. ¿Está la "curva teórica" muy próxima a la que representa los datos experimentales? Según los datos, ¿te parece que $\frac{d}{t^2}$ es prácticamente constante?
4. Si E es proporcional al cuadrado de v, y E es 64 cuando v es 4, determina
   (a) una ecuación que conecte E con v.
   (b) el valor de E cuando $v = 6$.
   (c) el valor de v cuando $E = 16$.

5. Supón que la semilla de grama cuesta 70 centavos la libra, y que con una libra se puede sembrar un área de 280 pies cuadrados.
   (a) ¿Cuántas libras de semillas se necesitarán para sembrar un terreno cuadrado, de 10 pies de lado?
   (b) ¿Cuánto costará la semilla necesaria para sembrar un terreno cuadrado de 10 pies de lado?
   (c) Si el costo de la semilla para sembrar un terreno cuadrado de s pies de lado es C centavos, determina una ecuación que conecte C y s.
   (d) ¿Cuánto costaría la semilla necesaria para sembrar un terreno cuadrado de 65 pies de lado?
   (e) Si hay disponibles $15.00 para comprar semilla, ¿podrás comprar suficiente para sembrar un terreno cuadrado de 75 pies de lado?
6. Se deja caer una pelota desde lo alto de una torre. La distancia, d pies, que ha recorrido en su caída varía con el cuadrado del tiempo, t segundos, que ha pasado desde que partió.
   (a) Según tus conocimientos previos, ¿qué ecuación escribirías para conectar d y t?
   (b) ¿Qué distancia recorre la pelota en los 3 primeros segundos?
   (c) Si te dicen que la pelota ha caído 144 pies en los primeros 3 segundos, escribe una ecuación que conecte d y t.
   (d) Usando la ecuación que has escrito en (c), ¿puedes calcular cuánto cae la pelota durante los primeros 5 segundos?

La ley de la gravitación de Newton dice que la fuerza con que se atraen mutuamente dos objetos varía inversamente con el cuadrado de la distancia que hay entre ellos:

$$F = \frac{k}{d^2}$$

donde k es una constante.

Los problemas de este capítulo te dan alguna idea de las

muchas maneras como pueden estar relacionadas entre sí dos cantidades que varían. En la mayor parte de los casos que hemos estudiado, la relación puede ser expresada por una ecuación de la forma

$$y = kx^n$$

ó

$$y = \frac{k}{x^n}$$

donde n es un número natural y k es una cierta constante. Como hemos indicado, muchas de las leyes de la naturaleza son de este tipo.

Ejercicios 9-10b

Usa la siguiente notación: e centímetros es la longitud de una arista de un cubo; P centímetros es el perímetro de una cara del cubo; S centímetros cuadrados es el área total de todas las caras del cubo; V centímetros cúbicos es el volumen del cubo.

1. Determina una ecuación que conecte P y e; S y e; V y e.
2. Completa los siguientes enunciados:
   (a) P varía ____ ____ ____.
   (b) S varía ____ ____ ____.
   ¿Cómo describirías la manera en que V varía con e?
3. Dibuja en un sistema de ejes coordenados las gráficas de las tres ecuaciones que has hallado en (a). Toma los valores 0, 1, 2, 3 y 4 para e.
4. Utilizando las gráficas que has dibujado en el problema 3, halla P, S y V cuando e es $2\frac{1}{2}$. Verifica los resultados empleando las ecuaciones que has encontrado en el problema 1.
5. Usa las gráficas que dibujaste en el problema 3 para estimar cuál de los valores P, S y V será mayor y cuál será menor cuando e es 10. Utiliza las ecuaciones que has obtenido en el problema 1 para comprobar tu estimación.

9-11. Resumen y repaso

Nuestro estudio sobre triángulos rectángulos en este capítulo se ha basado en esta propiedad: Si un par de ángulos agudos

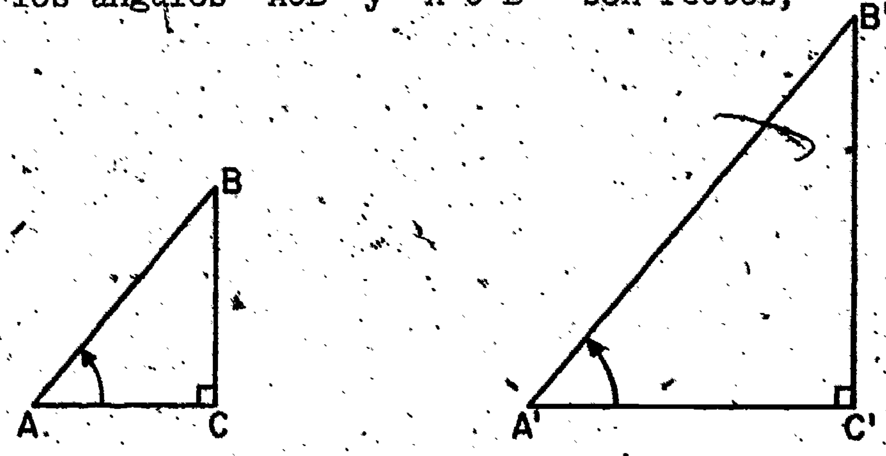
correspondientes en dos triángulos tienen amplitudes iguales, entonces las razones de las medidas de las longitudes de los lados correspondientes son iguales.

En lenguaje matemático:

Si los ángulos BAC y B'A'C' tienen igual amplitud

y

los ángulos ACB y A'C'B' son rectos,



entonces, en los triángulos ABC y A'B'C' tenemos

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Los siguientes pares de razones también son iguales:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}.$$

Se dice que dos triángulos ABC y DEF cualesquiera son <u>semejantes</u> si hay una correspondencia biunívoca,

$$A \longleftrightarrow D, \quad B \longleftrightarrow E, \quad C \longleftrightarrow F,$$

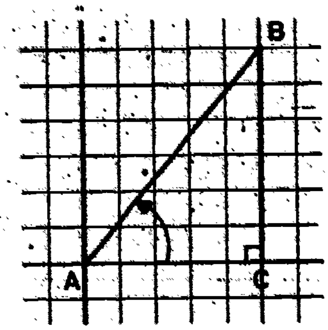
entre sus vértices de manera que

(1) los ángulos correspondientes son congruentes, y

(2) los lados correspondientes son proporcionales.

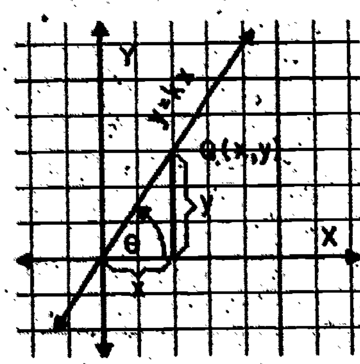
Se ha enunciado, aunque no se ha probado, que una cualquiera de estas dos condiciones implica la otra.

En un triángulo rectángulo son importantes las siguientes razones trigonométricas:



$$\text{sen} \angle CAB = \frac{CB}{AB} \qquad \text{tg} \angle CAB = \frac{CB}{AC} \qquad \cos \angle CAB = \frac{AC}{AB}.$$

La ecuación de una recta que pasa por el origen tiene la forma $y = kx$, donde k es constante. El número k se llama



la pendiente de la recta. Si θ (se lee "theta") es la amplitud del ángulo que la recta forma con el rayo positivo del eje de las abscisas, entonces

$$k = \text{tg}\ \theta$$

Si $Q(x, y)$ es un punto cualquiera sobre la recta, distinto del origen, entonces

$$\frac{y}{x} = k$$

A medida que el punto Q se mueve a lo largo de la recta, es

$$\frac{\text{variación en } y}{\text{variación en } x} = k = \text{pendiente}$$

Los dibujos a escala y los mapas son una aplicación directa de la idea de figuras semejantes.

Esta relación entre dos cantidades es uno de los tipos de variación considerados en este capítulo. Las tres clases de variación consideradas en este capítulo son variación directa,

variación inversa y variación directa con el cuadrado.

(1) Variación directa: $y = kx$

(a) Si x e y están relacionadas por la ecuación $y = kx$, donde k es una constante diferente de cero, decimos que y varía directamente con x. Algunas veces omitimos la palabra "directamente".

(b) El número k se llama la constante de proporcionalidad.

(c) Si k es positivo, cuando x crece y debe crecer, y cuando x decrece y debe decrecer.

(2) Variación inversa: $xy = k$.

(a) Si x e y están relacionadas por la ecuación $xy = k$, donde k es una constante diferente de cero, decimos que y varía inversamente con x.

(b) El número k es la constante de proporcionalidad entre y y el recíproco de x como se muestra en la forma $y = k \cdot \frac{1}{x}$.

(c) Si k es positivo, cuando x crece y debe decrecer, y cuando x decrece y debe crecer.

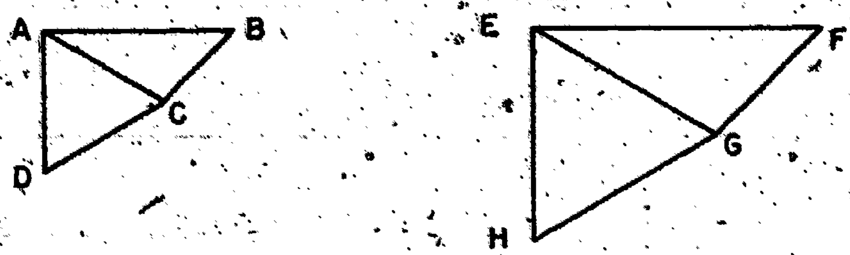
(d) La gráfica de $xy = k$ no es una línea recta, sino una curva con dos ramas. La gráfica no pasa por el origen y no hay ningún punto de la gráfica para el cual $x = 0$ ó $y = 0$.

Los siguientes ejercicios revisan los diferentes tipos de variación que se han tratado en este capítulo.

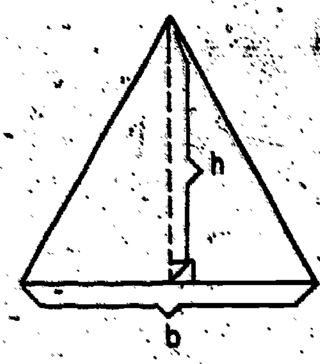
Ejercicios 9-11

1. Si y varía directamente con x, y si y es 16 cuando x es 2, halla y cuando x es 5.
2. Si y varía inversamente con x, y si y es 16 cuando x es 2, halla y cuando x es 5.
3. Si y varía directamente con el cuadrado de x, y si y es 16, cuando x es 2, halla y cuando x es 5.
4. Las áreas limitadas por dos polígonos semejantes son proporcionales a los cuadrados de dos diagonales correspondientes cualesquiera. Los polígonos de la siguiente página son semejantes y el punto C está a 2 centímetros del punto A; el

punto G está a 3 centímetros del punto E. Determina la razón de las medidas de las regiones limitadas por los polígonos.



5. La distancia, d pulgadas, de un resorte que se alarga varía directamente con la tracción, P libras, que se aplica al resorte.
   (a) Si una tracción de 10 lb. produce en cierto resorte un alargamiento de 5 plg., ¿qué tracción se necesitará para producir un alargamiento de 14 plg.?
   (b) Para el resorte de (a), ¿qué alargamiento producirá una tracción de 14 lb.?
6. La presión, p libras por pulgada cuadrada, ejercida por cierta cantidad de gas hidrógeno varía inversamente con el volumen, v pulgadas cúbicas, del recipiente que lo contiene. Si la presión es 7 libras por pulgada cuadrada cuando el gas está en un depósito de un galón, ¿cuál sería la presión si el gas estuviera encerrado en un depósito de media pinta?
7. Muestra que en $x + y = k$, y no varía inversamente con x.
8. Si A es 24 en $A = \ell w$, ¿qué clase de variación ocurre entre ℓ y w?
9. ¿Qué clase de variación se representa por $C = \pi d$? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
10. Supón que $V = \pi r^2 h$, y supón que el número r se multiplica por 5 mientras h no varía. ¿Qué pasa con V? ¿Cuál es la constante en este caso?
11. Haz una tabla que muestre la relación entre la medida h de la longitud de la altura y la medida b de la longitud de la base de un triángulo equilátero. Da tu resultado correcto con una cifra decimal.



b	2	4	6	8	10
h					

Esta tabla puede completarse, midiendo. Construye triángulos equiláteros cuyas bases tengan 2 unidades, 4 unidades, etc., de longitud. Tus resultados serán más exactos si los triángulos no son muy pequeños. Construye una gráfica que muestre la relación entre b y h. ¿Qué figura geométrica simple forma la gráfica?

12. Da una fórmula que exprese h en términos de b, en el problema 11. Probablemente quieras usar $\text{tg } 60° = h \div \frac{b}{2}$.

13. Construye una tabla que muestre la relación entre la medida b de la longitud de la base y la medida A del área de un triángulo equilátero. Usa los valores de b que has empleado en tu tabla para el problema 11. Dibuja una gráfica que muestre la relación entre b y A. Da una fórmula para A en términos de b.

Capítulo 10

GEOMETRIA DE POSICION

10-1. Introducción

Hasta ahora nuestros estudios de geometría se han referido principalmente a figuras en el plano, aunque hemos considerado algunos sólidos, tales como cubos y cilindros. Sin embargo, el mundo que nos rodea es definidamente tridimensional. Tu escritorio y tu silla son sólidos bastante complicados. Los edificios nos presentan ejemplos de numerosas curvas, superficies y sólidos en el espacio de 3 dimensiones. Para describir el vuelo de un avión, o de un cohete, o de un proyectil de artillería, se requiere un conocimiento muy preciso del espacio geométrico.

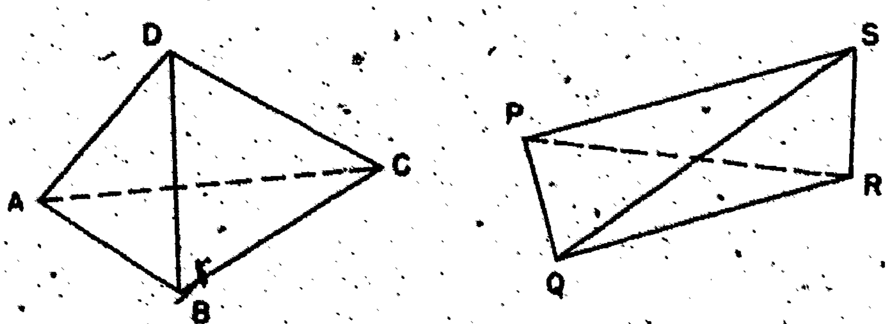
Una simple caja de cambios de un automóvil es un ejemplo de un objeto tridimensional complicado que aún no podemos describir en términos matemáticos. El cielo, con sus planetas, estrellas, satélites y aviones a retropropulsión; la tierra con sus montañas, cavernas y cañones (todos ellos situados sobre una forma más o menos "esférica"); nuestros caminos y supercarreteras; nuestra propia casa, escuela, iglesia y museo: todo esto nos sugiere millares de figuras geométricas, de formas y sólidos que el geómetra pretende describir.

En este capítulo, y en los Capítulos 11 y 12, comenzamos un estudio de mayores alcances de la geometría tridimensional: la geometría del espacio en que vivimos. Naturalmente, no podemos desarrollar inmediatamente métodos satisfactorios para describir todas las cosas que usamos, vemos o leemos. Aprenderás métodos para imaginar propiedades geométricas en el espacio, en términos de componentes simples y de sus analogías con las figuras simples del plano. Aprenderás a relacionar propiedades espaciales con las que has estudiado sobre puntos, rectas y circunferencias. Aprenderás a investigar y a descubrir algunas de esas propiedades por ti mismo. A medida que estudies, te formarás una mejor idea de cómo funcionan las matemáticas, descomponiendo figuras geométricas complicadas en componentes más simples que se estudian fácilmente.

Esta manera de estudiar geometría es muy valiosa en muchos aspectos tanto para el futuro matemático o ingeniero como también para el ama de casa, el hombre de negocios o el carpintero.

10-2. Tetraedros

Una figura geométrica de cierto tipo se llama tetraedro. Un tetraedro tiene cuatro vértices que son puntos en el espacio. Los dibujos siguientes representan tetraedros. "Tetra" es la palabra griega que significa cuatro.



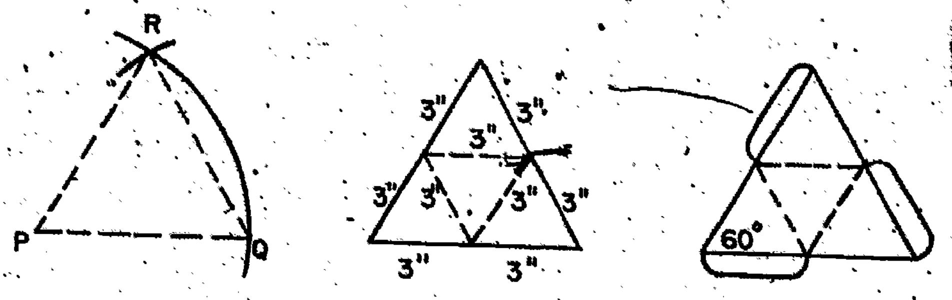
Los puntos A, B, C y D son los vértices del tetraedro de la izquierda. Los puntos P, Q, R y S son los vértices del de la derecha. Los cuatro vértices de un tetraedro no están en un mismo plano. La palabra "tetraedro" se refiere tanto a la superficie de la figura como al cuerpo "sólido", es decir, a la figura incluyendo su interior. Desde muchos puntos de vista, la distinción no tiene importancia. Habitualmente usamos el término "tetraedro sólido" cuando queremos referirnos a la superficie juntamente con su interior. Podemos designar un tetraedro enumerando sus vértices. Habitualmente ponemos paréntesis encerrando las letras, tal como en (ABCD) o (PQRS) para designar tetraedros sólidos. Los vértices pueden enumerarse en cualquier orden.

Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$ se llaman aristas del tetraedro (ABCD). Algunas veces usamos (AB) o (BA) para referirnos a la arista $\overline{AB}$. ¿Cuáles son las aristas del tetraedro (PQRS)?

Tres vértices cualesquiera de un tetraedro son los vértices de un triángulo y están en un plano. Un triángulo tiene un

interior en el plano en el que están sus vértices (y en el cual está él mismo). Usemos (ABC) para designar el triángulo ABC juntamente con su interior. Con otras palabras, (ABC) es la reunión de ΔABC y de su interior. Los conjuntos (ABC), (ABD), (ACD) y (BCD) se llaman las caras del tetraedro (ABCD). ¿Cuáles son las caras del tetraedro (PQRS)?

Ahora introducimos algunas medidas, y así lo haremos ocasionalmente, por la conveniencia de uniformar modelos y debido a la gran facilidad de visualizar los sólidos. Este capítulo trata fundamentalmente de la geometría no métrica o geometría "sin medidas", llamada geometría de posición. En los ejercicios se te pedirá hacer algunos modelos de tetraedros. El tipo de tetraedro del cual se construye más fácilmente un modelo, se llama tetraedro regular. Sus aristas son todas de la misma longitud. En una hoja de cartón o cartulina, construye un triángulo equilátero de 6 pulgadas de lado. Puedes hacer esto con una regla y un compás o con una regla y un transportador.

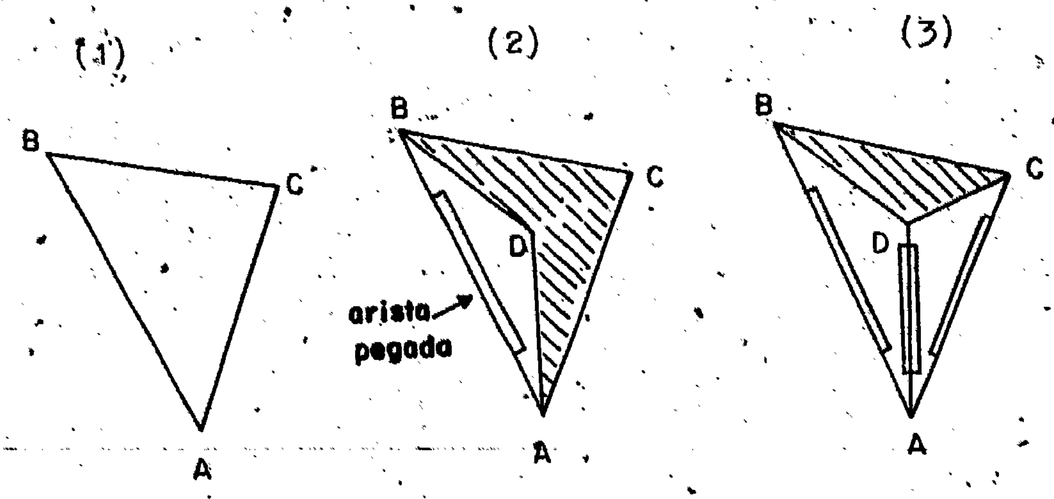


¿Te das cuenta cómo el dibujo de la izquierda sugiere la construcción con la regla y el compás? El arco que pasa por Q y R tiene por centro P. El otro arco que pasa por R tiene el mismo radio, pero su centro está en Q. Los segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$ tienen la misma longitud y son congruentes.

Ahora marca los tres puntos que están a mitad de camino entre los pares de vértices. Recorta la región triangular grande. Efectúa cuidadosamente los tres dobleces a lo largo de los segmentos que unen esos puntos medios. Puedes emplear una regla para ayudarte a hacer esos dobleces. Tu región triangular original aparece ahora descompuesta en cuatro regiones triángulos pequeños. Junta los tres vértices originales sobre el centro del triángulo medio. Sujeta los bordes libres con cinta engomada. Esto se facilita si

agregas aletas como se indica en la tercera figura. Ahora tienes un modelo de tetraedro regular.

¿Cómo construimos un modelo de un tetraedro que no es regular? Recorta una región triangular de un trozo de cartón o cartulina. Úsalo como base para tu modelo, como se indica a continuación. Marca sus vértices con A, B y C. Recorta otro triángulo con uno de sus lados de la misma longitud que $\overline{AB}$. Pega un triángulo con el otro a lo largo de los lados de igual longitud, usando cinta engomada; por ejemplo, usa la arista (AB). Dos de los vértices del segundo triángulo ya están marcados con A y con B. Marca su tercer vértice con D. Recorta una tercera región triangular con un lado de igual longitud que $\overline{AD}$ y otro lado de igual longitud que $\overline{AC}$. Si el ángulo entre estos dos lados es demasiado grande o demasiado pequeño, el modelo es más difícil de armar. Ahora pega los lados del tercer triángulo a $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$ con cinta engomada, armando una figura en el espacio. El modelo que has construido hasta ahora se parecerá a un vaso de papel en forma de pirámide si pones el vértice A hacia abajo, como se indica en el dibujo. Finalmente, recorta una región triangular que le sirva de tapa y fíjala con cinta engomada. Ahora tienes un modelo de tetraedro.



Ejercicios 10-2

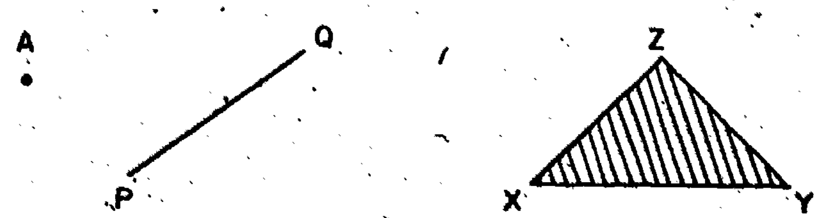
1. Haz dos modelos de tetraedros regulares en cartón o cartulina. Construye ambos modelos de manera que cada una de sus aristas mida 3 pulgadas.

2. Construye un modelo de un tetraedro que no sea regular.
3. Al formar la tercera cara de un tetraedro no regular, ¿qué dificultades encontrarías si hicieras el ángulo DAC demasiado grande o demasiado pequeño?

10-3. Símplices

El conjunto de puntos más simple que puedes imaginar es el que consiste en un solo punto. El inmediato más simple es, ciertamente, el conjunto que consiste en dos puntos. Dos puntos diferentes en el espacio están exactamente sobre una recta, y son los extremos de exactamente un segmento (que es un subconjunto de la recta). Un segmento tiene longitud pero no tiene ancho o espesor, de manera que no tiene área. Decimos que un segmento o una recta son unidimensionales. Cualquiera de los dos puede ser considerado como el objeto unidimensional más simple del espacio. En este capítulo consideraremos el segmento, no la recta.

El conjunto de puntos más simple que le sigue consiste en tres puntos. Si los tres puntos están sobre una misma recta, obtenemos solamente parte de la recta. Este es el mismo objeto que obtuvimos antes con dos puntos. Por consiguiente, convengamos en que nuestros tres puntos no están sobre la misma recta. Entonces, hay exactamente un plano que contiene los tres puntos y hay exactamente un triángulo con esos tres puntos como vértices. También hay una región triangular que, juntamente con el triángulo que la limita, tiene los tres puntos como vértices. Este objeto matemático, el triángulo, juntamente con su interior, es el que vamos a considerar ahora. Tiene un área y es bidimensional. Puede ser considerado como la figura bidimensional más simple del espacio.



El siguiente conjunto de puntos más simple del espacio sería un conjunto de cuatro puntos. Si los cuatro puntos están todos en un plano, entonces la figura determinada por ellos también está en el plano. Requerimos que los cuatro puntos no estén todos en un plano. Este requerimiento también nos garantiza que tres cualesquiera de ellos no pueden estar sobre una recta. Si tres de ellos estuvieran sobre una recta, entonces habría un plano que contendría a esa recta y el cuarto punto, y los cuatro puntos estarían en un mismo plano. Tenemos, pues, cuatro puntos en el espacio que no están sobre un mismo plano. Esto sugiere un tetraedro. Los cuatro puntos del espacio son los vértices de exactamente un tetraedro sólido. Un tetraedro sólido tiene volumen, y es tridimensional. Se le puede considerar como el objeto tridimensional más simple del espacio.

Ahora tenemos cuatro conjuntos, cada uno de los cuales puede considerarse como el más simple de su especie. Entre ellos hay notables analogías; por eso deben tener nombres semejantes que nos recuerden sus propiedades básicas. A cada uno de ellos lo llamaremos un simplex. Utilizaremos además un prefijo para indicar su dimensión. Entonces, un conjunto que consiste en un solo punto se llamará un 0-símplex. Un segmento de recta se llamará un 1-símplex. Un triángulo, juntamente con su interior, se llamará un 2-símplex. Un tetraedro sólido (que incluye su interior) se llamará un 3-símplex.

Hagamos una tabla para ayudarnos a ordenar estas ideas.

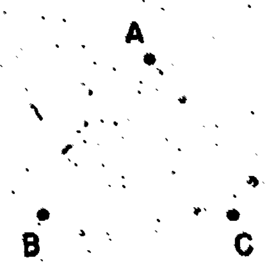
Número de puntos	Objeto más simple determinado	Nombre
1	punto	0-símplex
2	segmento	1-símplex
3	triángulo con su interior	2-símplex
4	tetraedro sólido	3-símplex

Hay otra manera de imaginar las dimensiones de estos conjuntos, haciendo uso de la relación de "estar entre", aplicada a una terna de puntos.

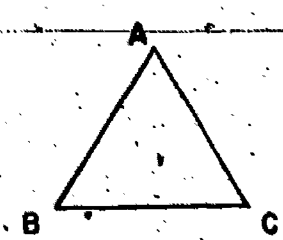
Comencemos con dos puntos. Considera estos dos puntos y todos los puntos que están entre ellos. El conjunto así formado es un segmento. Ahora toma el segmento *juntamente con* todos los puntos que están entre dos puntos *cualesquiera* del segmento. Obtenemos exactamente el mismo segmento. No aparecen puntos nuevos "eligiendo puntos entre" nuevamente. El procedimiento de "elegir puntos entre" se ha usado una vez y hemos obtenido un conjunto de una dimensión, un 1-símplex.

Ejercicios de clase 10-3

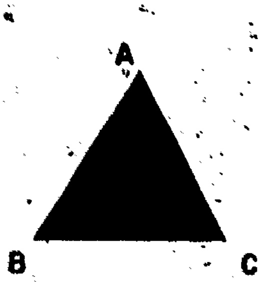
1. Marca tres puntos A, B y C no colineales, y que estén más o menos a la misma distancia uno de otro, como se indica en la figura a la derecha.



   (a) Traza los segmentos de recta que contengan todos los puntos entre A y B, entre B y C, y entre A y C. ¿Qué representa la figura?



   (b) Sombrea o colorea todos los puntos que están entre dos puntos cualesquiera del conjunto determinado en (a). ¿Qué representa la figura?



   (c) Si el procedimiento empleado en (b) se aplica nuevamente, ¿encontrarás nuevos puntos? ¿Cuántas veces has usado este procedimiento? La figura que has obtenido representa un conjunto bidimensional, un 2-símplex.

2. Imagina cuatro puntos A, B, C y D, que no estén sobre un mismo plano. Para este problema es mejor que uses tu modelo de tetraedro no regular en vez de dibujar una figura.

   (a) Sombrea o colorea (o traza un segmento) que incluya todos

los puntos entre A y B. También, sombrea (o traza el segmento) que contiene todos los puntos entre B y C, entre A y C, y así sucesivamente, hasta que acabes por incluir en tu dibujo todos los puntos entre dos vértices cualesquiera. Describe el conjunto de puntos que has dibujado.

(b) Sombrea o colorea todos los puntos que están entre dos puntos cualesquiera del conjunto determinado en (a). Describe el conjunto de puntos que has sombreado o coloreado.

(c) Imagina la reunión del conjunto de puntos que has sombreado o coloreado y todos los puntos que están entre dos cualesquiera de los puntos sombreados o coloreados. Describe este nuevo conjunto de puntos como reunión de dos conjuntos.

(d) Si el procedimiento se repite nuevamente, ¿obtendrás nuevos puntos? ¿Cuántas veces has usado este procedimiento? El conjunto de puntos obtenido en (c) es un conjunto tridimensional, un 3-símplex.

3. Consideremos exactamente un punto.

(a) Si comienzas con exactamente un punto y aplicas el procedimiento empleado en los problemas 1 y 2, ¿qué conjunto obtendrás?

(b) ¿Cuántas veces necesitarías aplicar el procedimiento de "elegir todos los puntos que están entre dos puntos"? El conjunto de puntos obtenido es un conjunto cero dimensional, un 0-símplex.

Finalmente consideremos de nuevo un 3-símplex. Mira uno de tus modelos de tetraedros. Tiene cuatro caras, y cada cara es un 2-símplex. Tiene seis aristas y cada arista es un 1-símplex; tiene cuatro vértices y cada vértice es un 0-símplex.

Ejercicios 10-3

1. (a) ¿Cuántos 1-símplices tiene como aristas un 2-símplex?

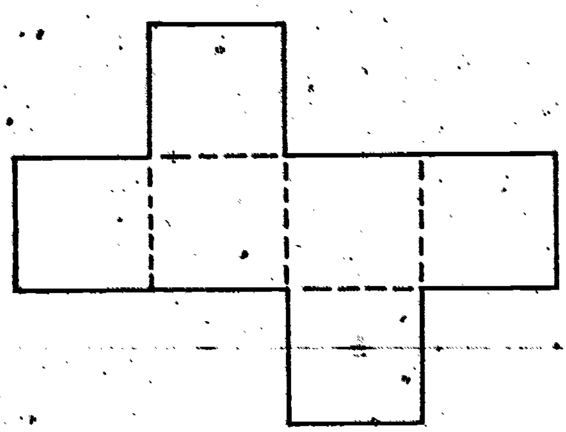
   (b) ¿Cuántos 0-símplices tiene como vértices?

2. ¿Cuántos 0-símplices tiene como vértices un 1-símplex?

3. Dibuja una figura para mostrar cómo dos 1-símplices pueden tener una intersección que es exactamente un extremo de cada uno de ellos.
4. Dibuja una figura para mostrar cómo dos 2-símplices pueden tener una intersección que es exactamente un vértice de cada uno de ellos.
5. Dibuja una figura para mostrar cómo dos 2-símplices pueden tener una intersección que es exactamente un 1-símplex de cada uno de ellos.
6. Usando modelos, muestra cómo dos 3-símplices pueden tener una intersección que es exactamente un vértice de cada uno de ellos.
7. Usando modelos, muestra cómo dos 3-símplices pueden tener una intersección que es exactamente una arista de cada uno de ellos.
8. Usando modelos, muestra cómo dos 3-símplices pueden tener una intersección que es exactamente un 2-símplex de cada uno de ellos.

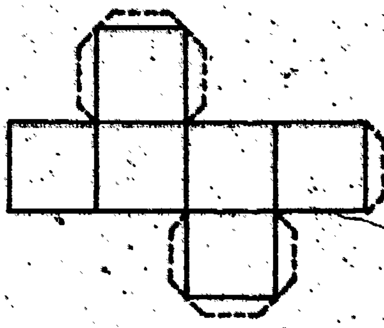
10-4. Modelos de cubos

Probablemente sabes que si quieres construir una caja de las más comunes, necesitas para ello seis caras rectangulares. Las caras tienen que coincidir y combinarse correctamente entre sí. Hay una manera bastante fácil de construir el modelo de un cubo.



Dibuja seis cuadrados iguales en cartón o cartulina, como se indica en la figura anterior. Recorta el borde de tu figura y

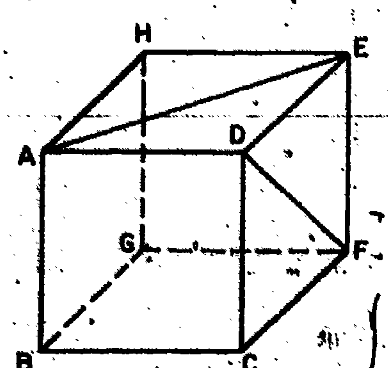
dóblala a lo largo de las líneas de puntos. Usa cinta engomada o goma para pegar los cuadrados entre sí. Si empleas goma, será necesario hacer aletas, como se indica a continuación:

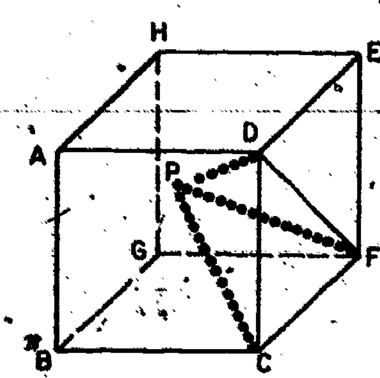


En los ejercicios se te pedirá construir varios modelos de cubos.

¿Se puede considerar la superficie de un cubo como la reunión de 2-símplices (es decir, de triángulos con sus interiores)? ¿Puede considerarse un cubo sólido como la reunión de 3-símplices (es decir, de tetraedros sólidos)? La respuesta a ambas preguntas es "sí". Explicaremos una manera de tratar esas cuestiones.

Cada cara de un cubo puede ser considerada como la reunión de dos 2-símplices. En la figura al pie de esta página, el dibujo de la izquierda muestra un cubo con dos de sus caras subdivididas en dos 2-símplices cada una. La cara ADEH, por ejemplo, aparece como la reunión de (ADE) y (AEH). La otra cara, cuya subdivisión se indica, es CDEF, y aparece como la reunión de (CDF) y (DFE). Las otras caras no han sido subdivididas, pero podemos imaginarlas como la reunión de dos 2-símplices cada una. Entonces se puede imaginar la superficie del cubo como la reunión de doce 2-símplices.





Análogamente, podemos considerar el cubo sólido como la reunión de 3-símplices (tetraedros sólidos) como sigue: Sea P un punto cualquiera del interior del cubo. Para cualquier 2-símplex de la superficie, por ejemplo (CDF), (PCDF) es un 3-símplex. En el dibujo de la derecha de la figura anterior, P está en el interior del cubo. Los 1-símplices, (PC), (PD) y (PF), también están dentro del cubo. Entonces, con doce 2-símplices sobre la superficie, tendríamos doce 3-símplices cuya reunión sería el cubo. El cubo sólido es la reunión de 3-símplices de esta "conveniente" manera.

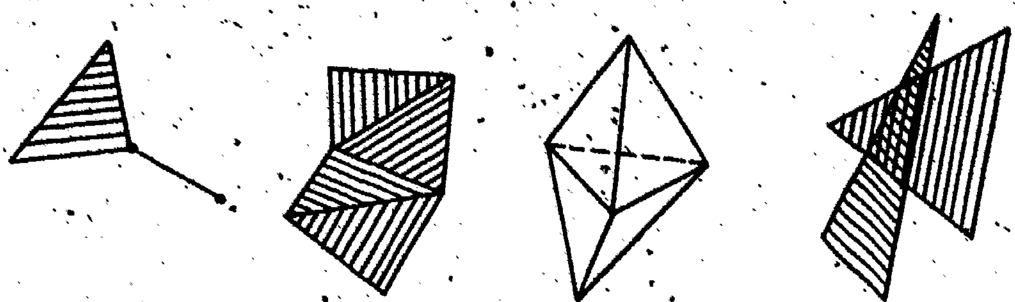
Ejercicios 10-4

1. Construye dos modelos de cubos en cartón o cartulina. Hazlos de manera que cada arista tenga 2 pulgadas de longitud.
2. En uno de tus modelos, sin agregar ningún otro vértice, dibuja segmentos que expresen la superficie del cubo como una reunión de 2-símplices. Marca todos los vértices en el modelo con las letras A, B, C, D, E, F, G y H. Imagina un punto P en el interior del cubo. Usando este punto y los vértices de los 2-símplices sobre la superficie, haz una lista de los doce 3-símplices cuya reunión es el cubo sólido.
3. En el mismo cubo del problema 2, marca un punto en el centro de cada cara. (Cada punto deberá estar sobre uno de los segmentos que has dibujado en el problema 2.) Dibuja segmentos para indicar la superficie del cubo como reunión de 2-símplices, usando como vértices los vértices del cubo y esos seis nuevos puntos que has marcado. ¿Mediante la reunión de cuántos 2-símplices está expresada ahora la superficie?
4. Imagina una figura geométrica construida mediante el cubo y seis pirámides cuadrangulares cuando se hace coincidir la base de cada pirámide con una cara del cubo. Este es un ejemplo de poliedro. ¿Cuántas caras triangulares tiene la superficie de este poliedro? ¿Puedes establecer una correspondencia biunívoca entre este poliedro y la superficie de un cubo subdividida en 2-símplices como en el problema 3, haciendo corresponder

vértice con vértice, arista con arista y 2-símplex con 2-símplex?

10-5. Poliedros

Un poliedro es la reunión de un número finito de símplices. Puede consistir exactamente en un símplex, o quizás en la reunión de siete símplices, o tal vez de 7,000,000 de símplices. Lo que decimos es que un poliedro es la reunión de algún número particular de símplices. En la sección anterior hemos observado que un cubo sólido puede ser considerado como la reunión de doce 3-símplices. Las siguientes figuras representan la reunión de símplices.



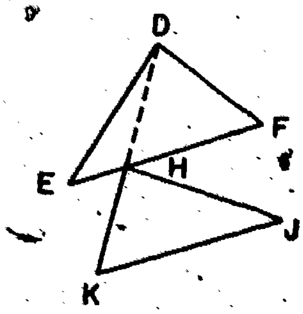
La figura de la izquierda representa una reunión de un 1-símplex y de un 2-símplex que no contiene al 1-símplex. Por consiguiente, es de dimensión mixta. En lo que sigue, no trataremos de los poliedros de dimensión mixta. Supondremos que un poliedro es la reunión de símplices de la misma dimensión. Nos referiremos a un poliedro tridimensional como formado por la reunión de 3-símplices. Un poliedro bidimensional es la reunión de 2-símplices. Un poliedro unidimensional es la reunión de 1-símplices. Cualquier conjunto finito de puntos puede ser considerado como un poliedro cero dimensional, pero aquí no estudiaremos dichos poliedros. No todo poliedro debe consistir necesariamente en una parte conexa, aunque la mayor parte de nuestros ejemplos serán de ese tipo.

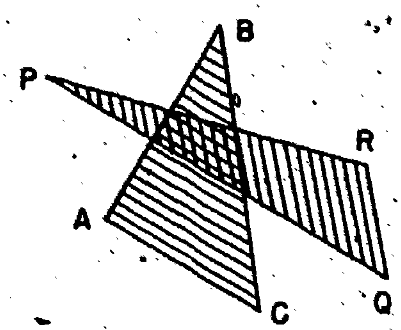
La figura de la derecha representa un poliedro que parece ser la reunión de dos 2-símplices (regiones triangulares), pero que no se intersecan convenientemente. Preferimos imaginar un poliedro como la reunión de símplices que se intersecan convenientemente, como en las dos figuras de en medio. La tercera

figura muestra dos 3-símplices con un 2-símplex como intersección. ¿Qué queremos decir exactamente con símplices que <u>se intersecan convenientemente</u>? Esto tiene una explicación fácil.

<u>Si dos símplices de la misma dimensión se intersecan convenientemente, entonces la intersección debe ser una cara, una arista o un vértice de cada uno de ellos.</u>

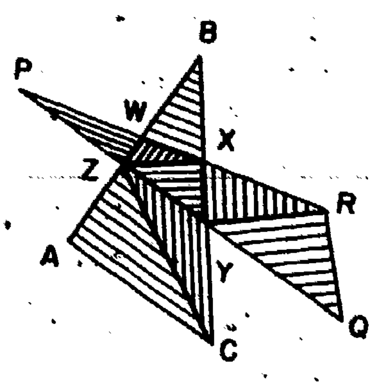
Consideremos con más detalle la reunión de símplices que no se intersecan convenientemente. En la figura de la derecha, los 2-símplices (DEF) y (HJK) tienen exactamente el punto H en común. No se intersecan <u>convenientemente</u>. Mientras que H es un vértice de (HJK), no lo es de (DEF). Sin embargo, el poliedro que es la reunión de estos dos 2-símplices, es también la reunión de tres 2-símplices que sí se intersecan <u>convenientemente</u>, a saber, (DEH), (DHF) y (HJK).





La figura de la izquierda representa la reunión de los 2-símplices (ABC) y (PQR). Estos no se intersecan convenientemente. Su intersección parece ser un cuadrilátero juntamente con su interior.

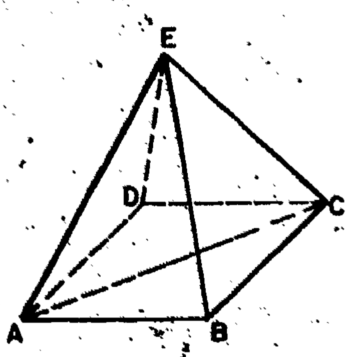
En la figura de la derecha hemos indicado cómo el mismo conjunto de puntos (el mismo poliedro) puede ser considerado cómo una reunión finita de 2-símplices que se intersecan convenientemente. El poliedro es la reunión de los ocho 2-símplices, (ACZ), (CZY), (PZW), (XYZ), (WXZ), (BWX), (XYR) y (YQR).

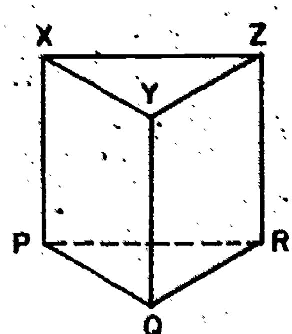


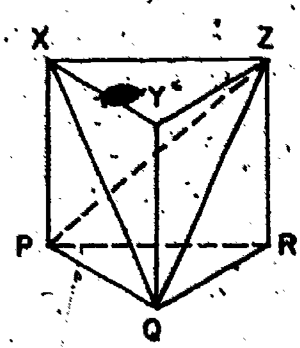
Estos ejemplos sugieren lo siguiente: Si un poliedro es la reunión de símplices que se intersecan de cualquier manera, entonces el mismo conjunto de puntos (el mismo poliedro) es también la reunión de símplices que se intersecan convenientemente.* Excepto en los ejercicios del final de esta sección, trataremos siempre con reuniones de símplices que se intersecan convenientemente. Consideraremos un poliedro como asociado a un conjunto particular de símplices que se intersecan convenientemente y cuya reunión es el poliedro. Cuando usamos la palabra "poliedro", entendemos que en él están los símplices.

¿Es un cubo sólido un poliedro? Es decir, ¿es una reunión de 3-símplices? Ya hemos visto que lo es. ¿Es un prisma sólido un poliedro? ¿Lo es una pirámide cuadrangular sólida? La respuesta a todas estas preguntas es sí. En efecto, cualquier objeto sólido cuyas caras son planas, (es decir, cuyas superficies no contienen ninguna parte curva) es un poliedro tridimensional, y puede ser expresado como la reunión de 3-símplices.

Como ejemplos consideremos una pirámide sólida y un prisma de base triangular.







En la figura de la izquierda, la pirámide sólida es la reunión de los dos 3-símplices (ABCE) y (ACDE). La figura del centro representa un prisma sólido con base triangular. El prisma tiene tres caras rectangulares. Sus bases son (PQR) y (XYZ). Veamos cómo se puede expresar este sólido como la reunión de ocho 3-símplices. Usemos el mismo procedimiento que empleamos para el cubo sólido. Primero imaginemos la superficie como la reunión de 2-símplices, pues las bases son 2-símplices. Luego supongamos que cada cara rectangular es la reunión de dos 2-símplices. En

la figura de la derecha, por ejemplo, se indica la cara YZRQ como la reunión de (YZQ) y (QRZ). Ahora imaginemos un punto F en el interior del prisma. El 3-símplex (FQRZ) es uno de los ocho 3-símplices que tienen a F como vértice y cuya reunión es el prisma sólido. En los ejercicios se te pedirá enumerar los otros siete.

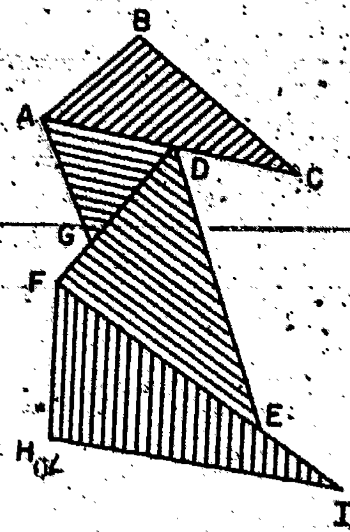
Finalmente, ¿cómo expresamos un prisma sólido de base no triangular como poliedro tridimensional, es decir, como reunión de 3-símplices con intersecciones convenientes? Hagamos uso de un pequeño artificio. Expresemos primero la base como reunión de 2-símplices con lo cual queda expresado el prisma sólido como una reunión de prismas sólidos triangulares. Luego podemos expresar cada prisma sólido triangular como la reunión de ocho 3-símplices. Podemos hacer esto de manera que todos los símplices se intersequen convenientemente. Para ayudarte a entender este sólido, imagina un prisma como si fuera un sólido con caras planas tales que las dos caras llamadas bases son congruentes y están en planos paralelos.

Nuestro cuento tiene la siguiente moraleja: Para resolver un problema difícil de pensar, tratemos primero de descomponerlo en muchos problemas fáciles cuyo método de solución conozcamos.

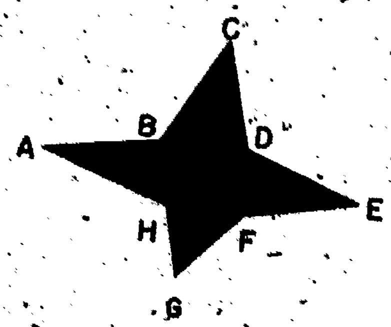
Ejercicios 10-5

1. Dibuja dos 2-símplices cuya intersección sea un punto y tal que
   (a) el punto sea un vértice de cada uno de ellos.
   (b) el punto sea un vértice de uno de ellos, pero no lo sea del otro.
2. Dibuja tres 2-símplices que se intersequen convenientemente y cuya reunión sea también un 2-símplex. (Sugerencia: Comienza con un 2-símplex como si fuera la reunión y luego subdivídelo.)
3. Se te pide dibujar varios poliedros bidimensionales, que sean la reunión de seis 2-símplices. Dibuja uno de ellos de manera que
   (a) ningún par de 2-símplices se interseque.
   (b) haya un punto común a todos los 2-símplices, pero que ningún par tenga otro punto en común.
   (c) el poliedro sea un rectángulo juntamente con su interior.

4. La figura de la derecha representa un poliedro como reunión de 2-símplices que no se intersecan convenientemente. Dibuja una figura análoga, y luego traza en ella tres segmentos que conviertan al poliedro en la reunión de 2-símplices que se intersequen convenientemente.



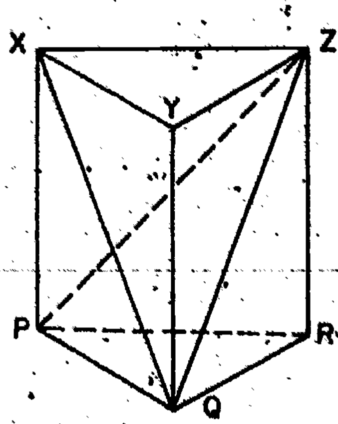
5. La figura bidimensional de la derecha puede ser expresada como la reunión de símplices que se intersecan convenientemente de muchas maneras. Dibuja una figura análoga y



(a) Exprésala como la reunión de seis 2-símplices, dibujando segmentos y sin emplear más vértices.

(b) Agregando un vértice cerca del centro (en otro dibujo de la misma figura), expresa el poliedro como la reunión de ocho 2-símplices que tengan a ese punto como un vértice.

6. (a) Haz una lista de ocho 2-símplices cuya reunión sea la superficie del prisma triangular de la derecha. (La figura es análoga a la que hemos usado antes.)



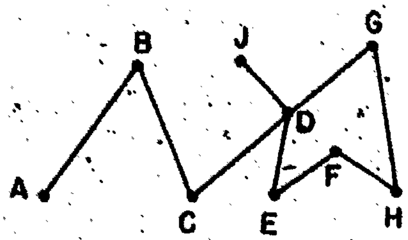
(b) Tomando el punto F en el interior del prisma, haz una lista de los ocho 3-símplices (cada uno de ellos conteniendo

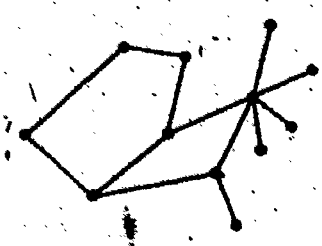
el punto F), cuya reunión sea el prisma sólido.

(c) La figura muestra que el prisma triangular PQRXYZ es la reunión de tres 3-símplices que se intersecan convenientemente. Enuméralos.

10-6. Poliedros unidimensionales

Un poliedro unidimensional es la reunión de cierto número de 1-símplices (segmentos), y puede estar contenido en un plano o no estarlo. Mira el modelo de un tetraedro: la reunión de las aristas es un poliedro unidimensional. Es la reunión de seis 1-símplices, y no está contenido en un plano. Podemos imaginar las siguientes figuras como representando poliedros unidimensionales contenidos en un plano (el plano del papel).

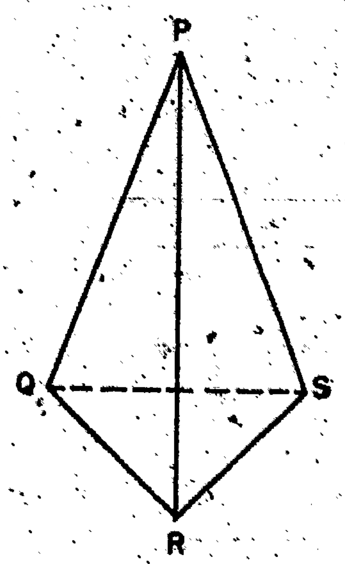




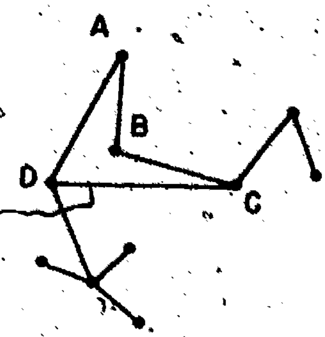
Hay dos tipos de poliedros unidimensionales de particular interés. Un camino poligonal es un poliedro unidimensional en el cual los 1-símplices están dispuestos en orden como sigue: hay uno que es el primero y otro que es el último. Todo otro 1-símplex del camino poligonal tiene un vértice común con el 1-símplex que le precede, y un vértice común con el 1-símplex que le sigue. No hay más intersecciones. Los vértices (puntos) primero y último del camino poligonal se llaman sus extremos, o mejor, vértice inicial y vértice final, respectivamente.

Ninguno de los poliedros unidimensionales de la figura anterior es un camino poligonal. Pero cada uno de ellos contiene muchos caminos poligonales. La reunión de (AB), (BC), (CD), (DG) y (GH) es un camino poligonal de A a H. La reunión de (JD) y (DE) es un camino poligonal de J a E, y consiste exactamente en dos 1-símplices.

En la figura del tetraedro de la derecha, la reunión de (PQ), (QR) y (RS) es un camino poligonal de P a S (con extremos P y S). El 1-símplex (PS) mismo es un camino poligonal de P a S. Considera el poliedro unidimensional que es la reunión de las aristas del tetraedro, y describe en él otro camino poligonal de P a S. (Usa un modelo si éste te ayuda a entender el problema con mayor claridad.) ¿Cuántos de estos caminos poligonales hay entre P y S?

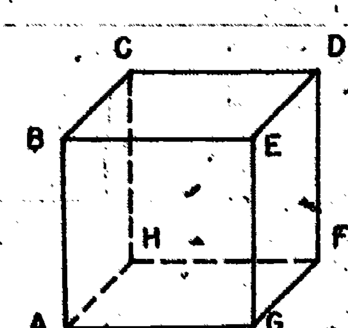


La reunión de dos caminos poligonales que tienen sus extremos comunes se llama un <u>polígono simple cerrado</u> (que también es una curva simple cerrada). El poliedro unidimensional de la derecha no es un polígono simple cerrado, pero <u>contiene</u> exactamente un polígono simple cerrado, a saber, la reunión de los caminos poligonales ABC y ADC que tienen sus extremos A y C comunes.



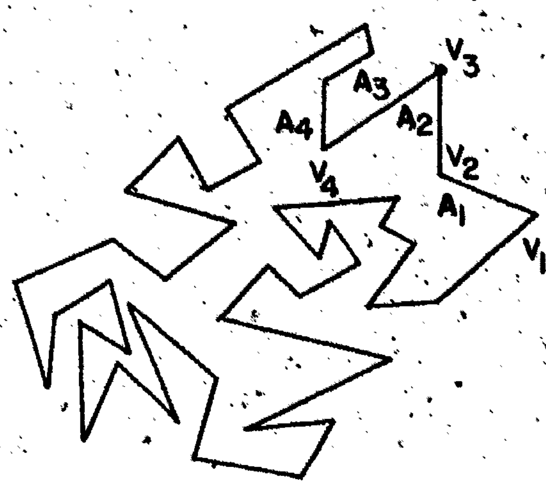
Se puede describir un polígono simple cerrado de otra manera, diciendo que es un poliedro unidimensional de una pieza, y que tiene la propiedad de que cada uno de sus vértices está exactamente en dos de sus 1-símplices. El polígono simple cerrado $ABCD$ se considera, pues, como la reunión de (AB), (BC), (CD) y (DA).

La reunión de las aristas del cubo de la figura es un poliedro unidimensional y contiene varios polígonos simples cerrados. Uno de ellos es la reunión de (AB),



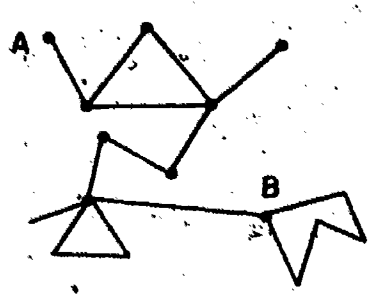
(BE), (EG) y (GA). Otro es la reunión de (AB), (BC), (CD), (DE), (EG) y (GA). Haz una lista de los vértices, indicando por lo menos dos polígonos simples cerrados que contengan a (BE) y (GA). (Usa un modelo si con él entiendes mejor.)

En los polígonos simples cerrados hay una relación muy sencilla: el número de 1-símplices (aristas) es igual al número de vértices. Considera la figura de la derecha y supón que comenzamos con algún vértice. Luego tomamos una arista que contiene ese vértice. Después tomamos el otro vértice contenido en esa arista, y a continuación la otra arista que contiene ese segundo vértice. Podemos imaginar que los vértices y las aristas están numerados como en la figura. Si continuamos el procedimiento, terminamos con la otra arista que contiene nuestro vértice original. Comenzamos con un vértice y terminamos con una arista después de haber alternado vértices y aristas durante todo el camino. Entonces el número de vértices es igual al número de aristas.



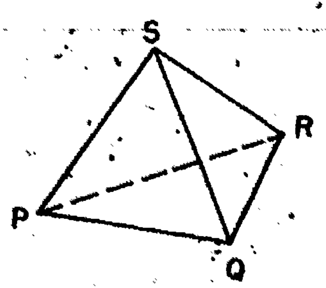
Ejercicios 10-6

1. La figura de la derecha representa un poliedro unidimensional. ¿Cuántos caminos poligonales de extremos A y B contiene? ¿Cuántos polígonos simples cerrados contiene?



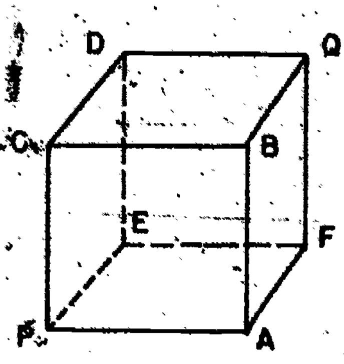
2. (a) ¿Cuántos polígonos simples cerrados contiene la reunión de las aristas de un 3-símplex (tetraedro sólido)?

   (b) Enuméralos.



(c) Indica uno que no esté contenido en un plano. (Si lo deseas, usa un modelo.)

3. Sean P y Q vértices de un cubo diametralmente opuestos entre sí (inferior izquierdo anterior y superior derecho posterior). Indica tres caminos poligonales de P a Q de manera que cada uno de ellos contenga todos los vértices del cubo y esté en la reunión de las aristas. (Si quieres, usa un modelo.)



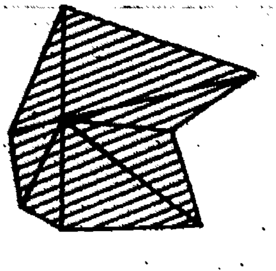
4. Dibuja un poliedro unidimensional que sea la reunión de siete 1-símplices y que no contenga ningún camino poligonal que consista en más de dos de esos símplices.

5. Dibuja un polígono simple cerrado sobre la superficie de uno de tus modelos de cubos, que interseque a cada cara y que no contenga ninguno de los vértices del cubo.

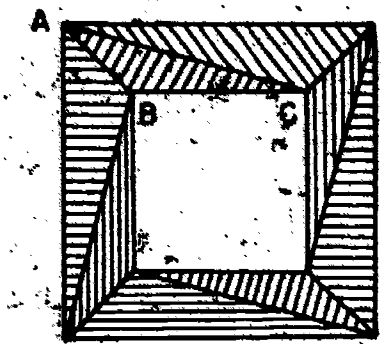
10-7. Poliedros bidimensionales

Un poliedro bidimensional es una reunión de 2-símplices. Como dijimos antes, convendremos en que los 2-símplices se intersecan convenientemente. Es decir, si dos 2-símplices se intersecan, entonces la intersección es o bien una arista común, o un vértice común. Hay muchos poliedros bidimensionales; algunos de ellos están en un plano, pero muchos de ellos no lo están. La superficie de un tetraedro, por ejemplo, no está en un plano. Consideremos primero algunos poliedros bidimensionales en un plano. Cuando dibujemos 2-símplices en un plano sombrearemos sus interiores.

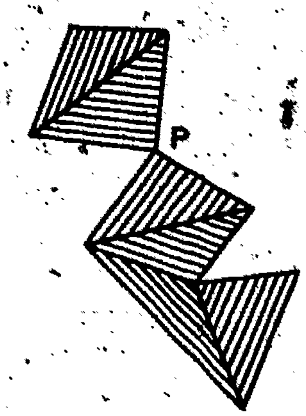
Todo poliedro bidimensional en un plano tiene una frontera en ese plano. La frontera misma es un poliedro unidimensional. La frontera puede ser un polígono



simple cerrado como la figura de la página anterior. En la figura de la derecha hemos indicado un poliedro como la reunión de ocho 2-símplices. (ABC) es uno de ellos. La frontera es la reunión de dos polígonos simples cerrados, los cuadrados interior y exterior. Estos dos polígonos no se intersecan.

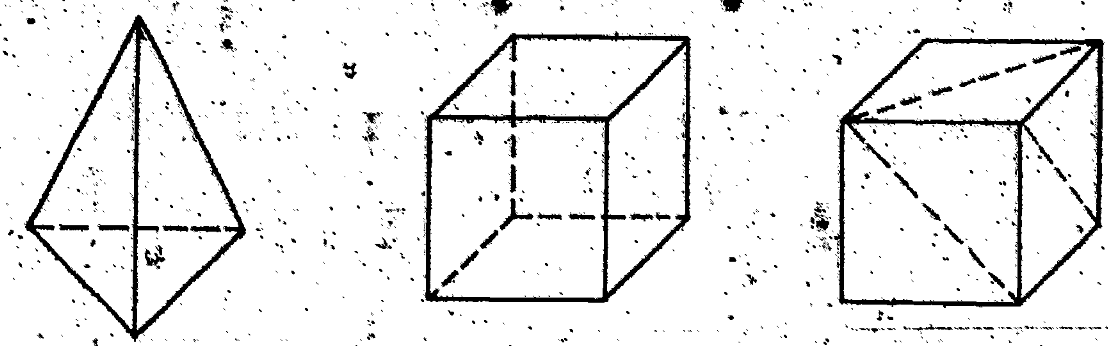


La figura de la derecha, abajo, representa un poliedro bidimensional como reunión de seis 2-símplices. La frontera de este poliedro en el plano es la reunión de dos polígonos simples cerrados que tienen común exactamente un vértice de cada uno de ellos, el punto P.



Supón que un poliedro bidimensional en el plano tiene una frontera que es un polígono simple cerrado (y nada más). Entonces el número de 1-símplices (aristas) de la frontera es igual al número de 0-símplices (vértices) de la misma frontera. Ya has visto en la sección anterior, por qué esto es cierto.

Hay muchos poliedros bidimensionales que no están en un plano. La superficie de un tetraedro es un buen ejemplo. La superficie de un cubo es otro ejemplo. Hemos visto que la superficie de un cubo puede ser considerada como la reunión de 2-símplices. Tenemos aquí algunos poliedros bidimensionales que son a su vez superficies o fronteras de poliedros tridimensionales. Consideremos estas dos superficies: la del tetraedro y la del cubo.



Mira estos dibujos, o si prefieres, toma algunos modelos (o ambos). Contemos el número de vértices, el número de aristas y el número de caras. La superficie de un cubo puede ser considerada por lo menos de dos maneras diferentes. Podemos pensar que sus caras son regiones cuadradas (como en la figura del centro), o podemos suponer que cada cara cuadrada ha sido subdividida en dos 2-símplices (como en la figura de la derecha). Usaremos la letra C para indicar el número de caras, A para el número de aristas y V para el número de vértices. Si estás utilizando modelos para contar y no te das cuenta de una regla que te ayude a contar, es preferible que marques los elementos del cubo según los vayas contando.

Construyamos una tabla con nuestros resultados.

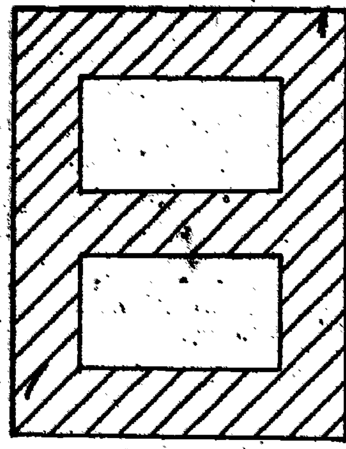
	C	A	V
Superficie del tetraedro	?	6	?
Superficie del cubo (caras cuadradas)	?	?	8
Superficie del cubo (caras cuadradas divididas en dos 2-símplices)	12	?	?

No es fácil darse cuenta de la relación que hay entre estos números con tan pocos ejemplos. Estamos tratando de encontrar una relación que sea cierta no solamente para estos poliedros bidimensionales, sino también para todos sus análogos. Trata de descubrir una relación que sea verdadera en cada uno de los casos anteriores.

Ejercicios 10-7

1. Haz una tabla como la anterior, indicando C, V y A para los poliedros bidimensionales mencionados en ella.
2. (a) Dibuja un poliedro bidimensional en el plano de manera que sea la reunión de diez 2-símplices y que su frontera sea un polígono simple cerrado.
   (b) ~~De la misma manera,~~ dibuja otro poliedro plano tal que su frontera sea la reunión de tres polígonos simples cerrados que tengan exactamente un punto común.
   (c) Dibuja otro poliedro de manera que su frontera sea la reunión de dos polígonos simples cerrados que no se intersequen.
3. Dibuja en el plano un poliedro bidimensional tal que el número de aristas de su frontera sea
   (a) igual al número de vértices.
   (b) el número de vértices más uno.
   (c) el número de vértices más dos.
4. Dibuja un poliedro bidimensional que sea la reunión de tres 2-símplices, de manera que cada par de ellos tenga una arista común. ¿Crees que existe en el plano un poliedro que sea la reunión de cuatro 2-símplices tales que cada par tenga solamente una arista común? ¿Existe alguno en el espacio?
5. Marca seis puntos en uno de tus modelos de cubos, de manera que cada punto esté en el centro de una de las caras. Considera cada cara como subdividida en cuatro 2-símplices, cada uno de los cuales tiene el punto central como vértice. Cuenta C (el número de 2-símplices), A (el número de 1-símplices) y V (el número de 0-símplices) para esta subdivisión de la superficie total. Conserva los resultados para usarlos más adelante.
6. Repite el problema 5 sin usar ningún modelo ni contar directamente. Imagina cuántos elementos debe haber. Por ejemplo, debe haber 14 vértices, 8 originales y 6 agregados.

*7. Expresa el poliedro de la derecha como una reunión de 2-símplices que se intersecan convenientemente (en aristas o vértices mutuos).



*8. Establece cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Si el enunciado no es verdadero, corrígelo.

(a) Todo 0-símplex (que no sea extremo) contenido en un 1-símplex dado, determina dos 1-símplices distintos cuya reunión es el 1-símplex original, y cuya intersección es el 0-símplex dado.

(b) Todo 1-símplex (que no sea frontera) contenido en un 2-símplex dado, determina dos 2-símplices distintos cuya reunión es el 2-símplex original, y cuya intersección es el 1-símplex dado.

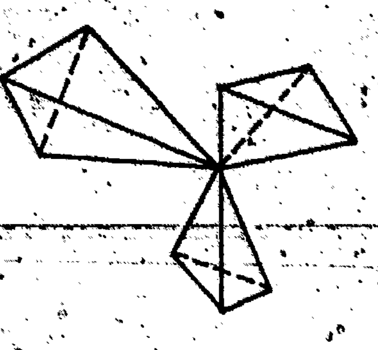
(c) Todo 2-símplex (que no sea frontera) contenido en un 3-símplex dado, determina dos 3-símplices distintos cuya reunión es el 3-símplex original, y cuya intersección es el 2-símplex dado.

10-8. Poliedros tridimensionales

Un 3-símplex es un poliedro tridimensional. Un cubo sólido es otro poliedro tridimensional. Poliedro tridimensional es toda reunión de 3-símplices en la cual los símplices del poliedro se intersecan convenientemente. Es decir, si dos 3-símplices se intersecan, la intersección es una cara bidimensional (2-símplex) de cada uno de ellos, o una arista (1-símplex) de cada uno de ellos, o un vértice (0-símplex) de cada uno de ellos.

Todo poliedro tridimensional tiene una superficie (o frontera)

en el espacio. Esta superficie a su vez es un poliedro bidimensional. Es la reunión de varios 2-símplices (que se intersecan convenientemente). En la figura de la derecha, se representa la superficie de un poliedro tridimensional, formada por las superficies de tres tetraedros que tienen exactamente un punto común.



Las clases más simples de superficies de los poliedros tridimensionales se llaman <u>superficies simples</u>. La superficie de un cubo y la superficie de un 3-símplex son superficies simples, y hay muchas más. Será una superficie simple toda superficie de un poliedro tridimensional obtenido de la siguiente manera: Comienza con un tetraedro sólido y júntalo con otro de manera que tengan por intersección una cara del tetraedro que estás agregando. Puedes seguir agregando tetraedros sólidos de todas las maneras y de todos los tamaños, siempre que cada uno de los tetraedros agregados tenga con el poliedro que ya has formado, una intersección que sea la reunión de una, dos o tres caras del 3-símplex que estás agregando. La superficie de todo poliedro formado de esta manera será simple.

La figura anterior no representa una superficie simple. ¿Por qué?

<u>Tarea de clase</u>. Toma cinco modelos de tetraedros regulares cuyas aristas midan 3 pulgadas. Pon una marca en cada una de las cuatro caras de uno de ellos. Luego pega sucesivamente los otros a las caras marcadas. El tetraedro marcado quedará en el centro y no podrás verlo. La superficie del objeto que has construido representa una superficie simple. Ves como, de esta manera, puedes pegar algunos tetraedros más para obtener objetos de forma cada vez más peculiar. Suponiendo que cada vez que agregas un tetraedro sólido, su intersección con la figura que ya habías formado es una cara, dos caras o tres caras del tetraedro que agregas. La superficie que obtienes será simple.

Puedes también soldar entre sí cubos sólidos para obtener

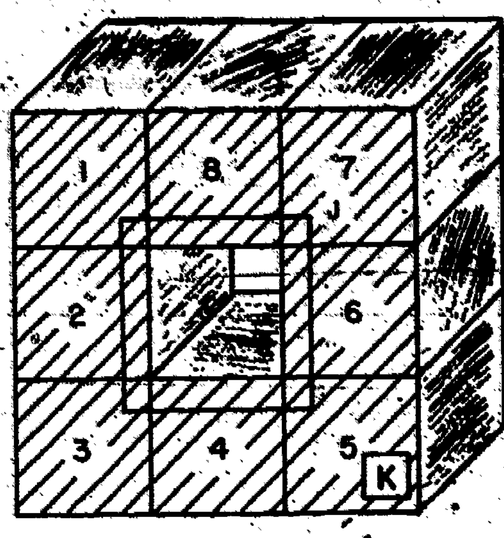
varios poliedros tridimensionales. Si quieres obtener superficies simples, debes seguir una regla como la que hemos dado antes. Los cubos deberán soldarse entre sí de manera que la intersección del poliedro que ya has formado con el nuevo cubo sea un conjunto limitado por un polígono simple cerrado. Por ejemplo, la intersección puede ser una cara, o la reunión de dos o más caras adyacentes del cubo que agregas, o la intersección puede consistir en partes de una o más caras. Lo importante es que la intersección esté limitada por polígonos simples cerrados.

Finalmente mencionaremos una propiedad interesante de las superficies simples. Dibuja cualquier polígono simple cerrado sobre una superficie simple. Entonces este polígono separa la superficie en exactamente dos conjuntos, cada uno de los cuales es conexo; es decir, es de una pieza.

Tarea de clase. Sobre la superficie de uno de los tres poliedros tridimensionales característicos (con superficie simple) que has construido antes, dibuja cualquier polígono simple cerrado (cuanto más grande mejor). No es necesario que esté contenido en una cara. Comienza a colorear la superficie del poliedro por cualquier parte, pero cuidando de no atravesar el polígono. Luego toma otro lápiz de color y haz lo mismo que antes, pero comenzando con la zona aún no coloreada. Colorea todo lo que puedas, pero sin cruzar el polígono. Al final de esta operación, toda la superficie debe estar pintada de algún color.

Si no sigues estrictamente las instrucciones para la construcción de poliedros de superficie simple, puedes obtener un poliedro cuya superficie no es simple. Por ejemplo, supón que pegas entre sí ocho cubos como en el dibujo de la siguiente página. El poliedro parece una rosquilla cuadrada. Observa que al unir el octavo cubo, la intersección del que estás añadiendo con los que ya tenías es la reunión de dos caras que no son adyacentes. La frontera de la intersección está formada por dos polígonos simples cerrados, y no por uno solo como debería ser.

Hay muchos polígonos simples cerrados sobre esta superficie que no la separan en dos. El polígono J, por ejemplo, no la separa, pero el polígono K sí. Ilustra estos dos ejemplos



coloreando la superficie tanto como te sea posible, sin cruzar el polígono.

Ejercicios 10-8

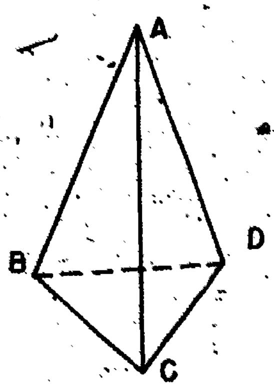
1. Toma un bloque de madera (de preferencia con las esquinas recortadas), y dibuja un polígono simple cerrado en su superficie de manera que interseque al mayor número posible de caras del sólido. Comienza a pintarlo luego por algún punto. No cruces el polígono. Pinta todo lo que puedas sin cruzar el polígono. Cuando hayas pintado todo lo que puedas, comienza a pintar con otro color toda la parte no coloreada, pero sin cruzar el polígono. Al final debes tener toda la superficie pintada.
2. Sigue el mismo procedimiento que en el problema 1, pero con otro sólido tridimensional. Usa uno de tus modelos u otro bloque de madera. Dibuja tu polígono simple cerrado todo lo complicado que quieras.
3. ¿Cuántas clases diferentes de poliedros (en términos de sus intersecciones) puedes construir precisamente con dos cubos del mismo tamaño, que se intersequen convenientemente, es decir, cuya intersección sea una cara, una arista o un vértice? Ilústralo con dibujos o modelos.
4. Toma tres cubos del mismo tamaño. Suelda unos con otros de manera que su reunión tenga una superficie simple. ¿Cuántos poliedros diferentes puedes construir de esta manera?

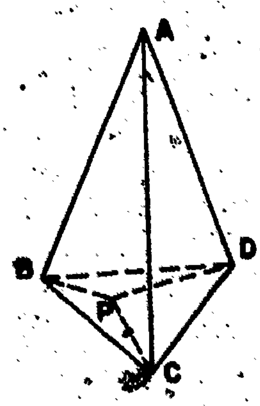
5. Se trata de soldar unos con otros tres cubos del mismo tamaño, de manera que se intersequen convenientemente.
   (a) Construye por lo menos 5 poliedros diferentes formados de esta manera.
   (b) ¿Tienen todos ellos superficies simples?
   (c) ¿Pueden construirse más de 5 de estos poliedros?

*6. Muestra que es posible pegar unos con otros 7 cubos de manera que el poliedro resultante no tenga superficie simple.

10-9. Número de vértices, aristas y caras—fórmula de Euler

En la Sección 10-7 te pedimos que contaras algunos elementos de un poliedro. Ahora estudiaremos el problema de otra manera. Probablemente no has descubierto una relación entre C, A y V. Considera el tetraedro en la figura siguiente. Su superficie es simple. ¿Qué relación podemos encontrar entre los números de sus vértices, aristas y caras?

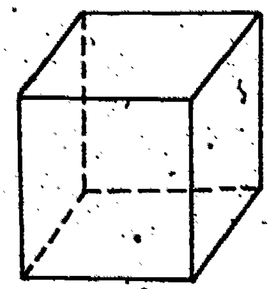




Hay un mismo número de aristas y de caras que pasan por el punto A: tres aristas y tres caras. Se puede ver que en la base hay el mismo número de vértices que de aristas. De este modo, hemos apareado todas las aristas con vértices y caras, pero todavía quedan por considerar dos elementos: el vértice A en la cúspide y la cara (BCD) en la base. Por lo tanto, $V + C - A = 2$. Ahora preguntémonos cuál sería la relación si una de las caras o la base se dividiera en varios 2-símplices. Supón que tenemos la base subdividida en tres 2-símplices agregando un vértice P en el interior de la base. La figura que aparece arriba, a la derecha, ilustra este caso. Nuestro recuento habría sido el

mismo hasta llegar a la base, y estaríamos en condiciones de aparear los tres nuevos 1-símplices que contienen el punto P con los tres nuevos 2-símplices de la base. En cambio, hemos eliminado la cara que era la antigua base, a la vez que hemos aumentado un nuevo vértice P. Entonces, el número de vértices más el número de 2-símplices es nuevamente dos unidades mayor que el número de 1-símplices, y $V + C - A = 2$.

Consideremos ahora un cubo, del que tenemos un dibujo a la derecha. ¿Cuántas caras tiene el cubo? ¿Cuántas aristas? ¿Cuántos vértices? ¿Es la suma del número de vértices y el número de caras dos unidades mayor que el número de aristas? Veamos por qué esto es así.



(1) El número de vértices de la cara superior es igual al número de aristas de la misma cara.

(2) El número de vértices de la cara del fondo es igual al número de aristas de la misma.

(3) El número de caras verticales es igual al número de aristas verticales.

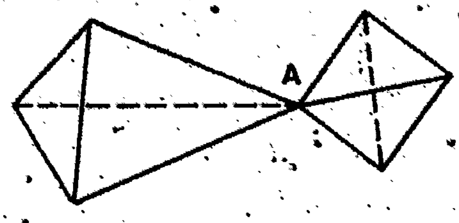
(4) (Número de vértices) + (número de caras verticales) - (número de aristas) = 0. Hemos contado todos los vértices, aristas y caras con la excepción de la cara superior y la del fondo. Entonces,

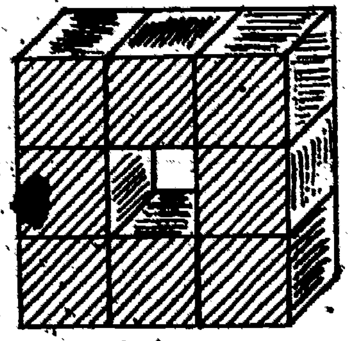
$$V + C - A = 2$$

¿Qué ocurriría si cada cara se descompusiera en dos 2-símplices? Para cada cara del cubo tendrías dos 2-símplices, pero también tendrías un nuevo 1-símplex en ella. El resto de los elementos no cambia. Entonces, $V + C - A$ es nuevamente 2.

Si tenemos una superficie simple cualquiera, ¿piensas que $V + C - A = 2$? En los ejercicios te pediremos verificar esta fórmula en varios ejemplos. Se trata de la llamada fórmula de Euler. Euler (se pronuncia "Oiler") es el nombre de un famoso matemático de comienzos del siglo XVIII.

Observemos ahora que la fórmula no vale en general para superficies que no son simples. Considera los dos ejemplos siguientes:





En la figura de la izquierda (la reunión de los dos tetraedros que tienen exactamente el vértice común A), $V + C - A = ?$ Cuenta a ver. Si prefieres, usa modelos de dos tetraedros. $V + C - A$ debe resultar 3. Sobre cada tetraedro, separadamente, el número de caras más el número de vértices menos el número de aristas es 2. Pero habríamos contado el vértice A dos veces. Entonces $V + C$ es una unidad menor que $A + 4$.

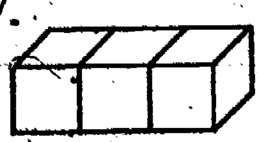
Se supone que la figura de la derecha representa la reunión de ocho cubos sólidos, como en la sección anterior. Falta el posible noveno cubo del centro. Cuenta todas las caras (de los cubos), aristas y vértices que están en la superficie. Para esta figura, $V + C - A$ debe ser 0. (Para empezar, V debe ser 32.)

Finalmente expresamos la fórmula de Euler en términos más generales. Supón que tenemos una superficie simple, y que está subdividida en un número (por lo menos tres) de partes que no se superponen. Requerimos que si dos de tales partes se intersecan, entonces la intersección debe ser o bien un punto o bien un camino poligonal. El número A es el número de las intersecciones de pares de partes que, justamente, no son puntos. El número V es el número de puntos de los cuales cada uno está contenido en por lo menos tres de estas partes. Entonces, $V + C - A = 2$.

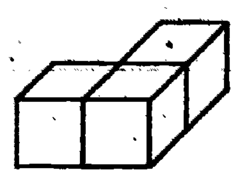
Ejercicios 10-9

1. Toma un modelo de cartón correspondiente a un tetraedro no regular. Cerca del centro de cada cara agrega un vértice. Considera la cara como la reunión de tres 2-símplices así formados. Cuenta las caras, aristas y vértices de los 2-símplices de la superficie. ¿Qué diferencia hay entre los números de caras, aristas y vértices de este poliedro y los del poliedro que obtuviste soldando cuatro tetraedros regulares a las cuatro caras de un quinto tetraedro?
2. Toma el modelo de un cubo. Subdivídelo en la siguiente forma: Agrega un vértice en el punto medio de cada arista y otro en el centro de cada cara. Une el nuevo vértice en el centro de cada cara con los otros ocho vértices que ahora tienes en esa cara. Deben resultarte ocho 2-símplices en cada cara. Calcula C, V y A. ¿Obtienes $V + C - A = 2$?
3. Subdivide una superficie simple cualquiera en un número de piezas planas. Cada pieza debe tener un polígono simple cerrado como frontera. Cuenta C, V y A para esta subdivisión de la superficie.
4. Toma el modelo de cartón de un tetraedro. Marca el punto medio de cada arista. En cada una de las cuatro caras, dibuja las rectas que unen los puntos medios de las aristas. De esta manera, cada cara queda dividida en cuatro 2-símplices. Cuenta el número de caras, vértices y aristas de esta superficie simple y determina el valor de $V + C - A$.
5. Se pueden soldar unos con otros tres cubos sólidos, de dos maneras diferentes para formar los dos poliedros indicados en la figura siguiente. En cada uno de los casos, cuenta V, C y A, y calcula $V + C - A$.

(a)

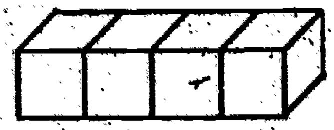


(b)

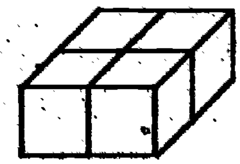


6. Junta cuatro cubos sólidos como se indica en los dibujos siguientes. Determina V + C - A en cada caso.

(a)



(b)



7

Capítulo 11

VOLUMENES Y AREAS SUPERFICIALES

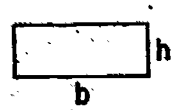
11-1. Areas de las figuras planas

En tus estudios anteriores, has aprendido a calcular las áreas de los interiores de varias figuras planas. La mayor parte de esta sección será un repaso, pero se estudiarán también algunas figuras geométricas nuevas.

Recuerda que área de una superficie es el número de unidades cuadradas contenidas en ella. Cuando hablamos del área de un rectángulo, por ejemplo, nos referimos al área de la región rectangular cerrada.

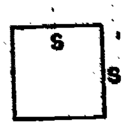
Para hallar la medida del área de un rectángulo, multiplicas las medidas del largo y del ancho. Escrito como fórmula,

$$A_{\text{▭}} = bh$$



Algunas veces usaremos símbolos tales como el rectángulo en "$A_{\text{▭}}$". Esto indica perfectamente la figura particular que se está estudiando.

Si los lados adyacentes de un rectángulo son congruentes, la figura es un cuadrado.

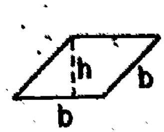


Luego, en este caso, $A_{\square} = s \cdot s$ ó $A_{\square} = s^2$.

Un paralelogramo tiene la misma área que un rectángulo de la misma base y altura, como se muestra en esta figura:

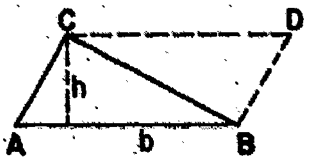
Escrito como fórmula, $A_{\text{▱}} = bh$.

Supón que los lados adyacentes de un paralelogramo son congruentes, como se indica en la figura. Esa figura se llama rombo.



~~Como es un paralelogramo, puede calcularse~~ su área por la fórmula $A_{\square} = bh$.

El área de un triángulo se halla comparándola con la de un paralelogramo.



En un triángulo cualquiera, ACB, si se traza $\overline{CD}$ paralela a $\overline{AB}$, y $\overline{BD}$ paralela a $\overline{AC}$, entonces ABDC es un paralelogramo. $\overline{CB}$ separa el interior del paralelogramo en dos regiones de igual área. El área del paralelogramo se halla multiplicando b por h. Entonces el área del triángulo puede hallarse por la fórmula $A_{\Delta} = \frac{1}{2}bh$.

Estudiando el círculo, aprendiste por uno o más métodos que si r es la medida del radio del círculo, la medida del área se halla multiplicando el cuadrado de r por π. Es decir,

$$A_{\odot} = \pi r^2$$

Ejercicios 11-1a

Determina el área de cada una de las figuras sugeridas más abajo, después de seguir estos dos pasos:

(a) Hacer un croquis de la figura.

(b) Indicar en esa figura las dimensiones.

Figura	Longitudes
1. Rectángulo ABCD	$\overline{AB}$ tiene 4 plg.; $\overline{BC}$ tiene 12 plg.
2. Rectángulo ABCD	$\overline{AB}$ tiene $\frac{3}{4}$ de pie; $\overline{AD}$ tiene 5 pies.
3. Cuadrado ABCD	$\overline{AB}$ tiene 13 plg.
4. Cuadrado XYZW	$\overline{YZ}$ tiene $3\frac{1}{2}$ pies.
5. Paralelogramo ABCD	$\overline{AB}$ tiene 16 plg.; la altura tiene 15 plg.
6. Rombo ABCD	$\overline{CD}$ tiene 6.5 cm.; la altura tiene 5 cm.

7. Rombo RSTU — $\overline{ST}$ tiene 5.2 pies; la altura tiene 4.6 pies.

---

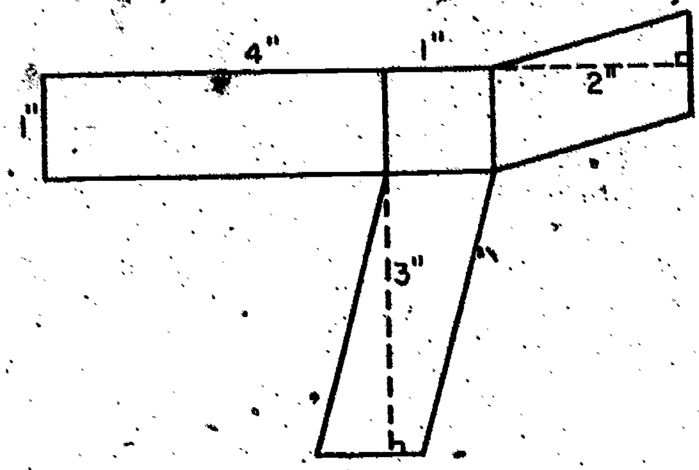
8. Triángulo rectángulo ABC — El ángulo A es recto; $\overline{AB}$ tiene 14 cm.; $\overline{AC}$ tiene 9.3 cm.

9. Triángulo XYZ — La base $\overline{YZ}$ tiene 38 pies; la altura $\overline{XW}$ tiene 37 pies.

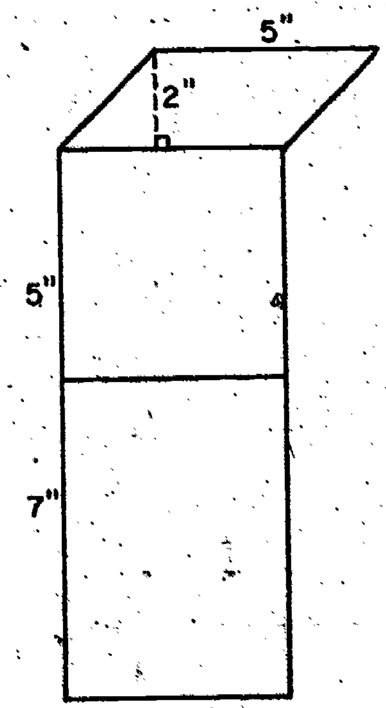
10. Círculo — El radio tiene 4.5 plg. ($\pi \approx 3.14$)

11. Determina el área del interior de cada una de las siguientes figuras planas:

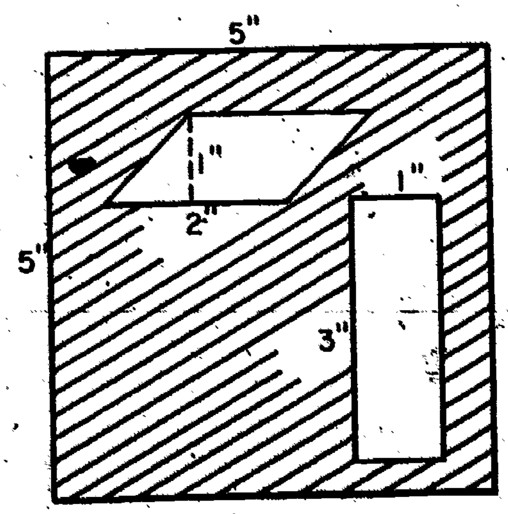
(a)



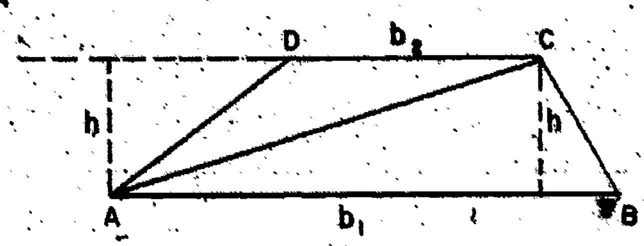
(b)



12. Halla el área de la zona sombreada en la siguiente figura:



Otra figura geométrica con la que tendremos que familiarizarnos es el trapecio. Un trapecio es un cuadrilátero que tiene solamente dos lados paralelos, como se muestra en la figura ABCD.



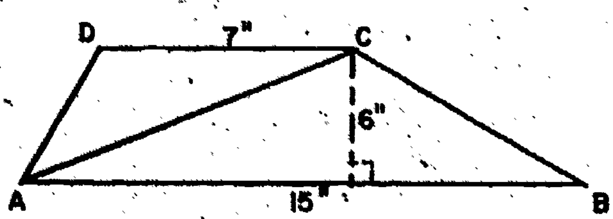
Si se traza una diagonal (tal como $\overline{AC}$), el interior del trapecio queda separado en dos regiones triangulares. Observa que las alturas de los dos triángulos son congruentes, pero las bases b_1 y b_2, tienen medidas diferentes. El área del trapecio es la suma de las áreas de los dos triángulos:

$$\text{Area de } ABCD = \text{Area de } ABC + \text{Area de } ADC$$

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2}hb_1 + \frac{1}{2}hb_2$$

Observa que las longitudes de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ no aparecen en el cálculo del área del trapecio.

<u>Ejemplo</u>. En el trapecio ABCD, halla el área como suma de las áreas de los dos triángulos determinados por la diagonal $\overline{AC}$.



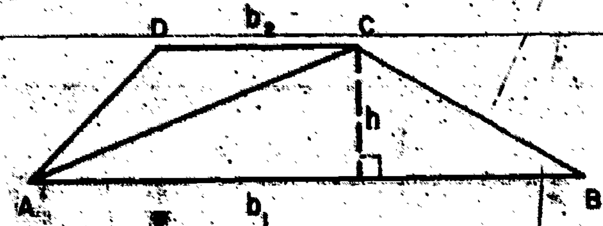
$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 15 = 45$$

$$A_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 21$$

$$A_{\text{trapecio}} = 45 + 21 = 66$$

El área del trapecio es 66 pulgadas cuadradas.

El método anterior para hallar el área del trapecio puede simplificarse utilizando la propiedad distributiva.



$$A_{ABCD} = \frac{1}{2}h \cdot b_1 + \frac{1}{2}h \cdot b_2$$

Entonces, por la propiedad distributiva,

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

Esta fórmula también puede escribirse así:

$$A_{ABCD} = \frac{h}{2}(b_1 + b_2) \quad ó \quad \frac{h(b_1 + b_2)}{2} \quad ó \quad h(\frac{b_1 + b_2}{2})$$

Esto muestra que podemos también imaginar el área de un trapecio como si se la obtuviera multiplicando la medida de la altura por la media de las medidas de las bases.

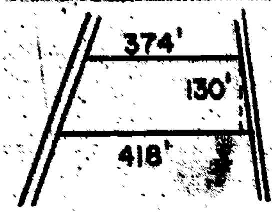
Ejercicios 11-1b

En los problemas 1 a 5, calcula las áreas de los trapecios cuyas medidas se indican.

	Altura	Base superior	Base inferior
1.	8 plg.	6 plg.	13 plg.
2.	16 plg.	35 plg.	37 plg.
3.	13 cm.	11 cm.	27 cm.
4.	5.4 pies	9.8 pies	12.7 pies
5.	$2\frac{1}{2}$ pies	$3\frac{1}{4}$ pies	$6\frac{1}{4}$ pies

*6. El área de un trapecio es 696 pulgadas cuadradas. Las longitudes de las bases son 23 pulgadas y 35 pulgadas. Calcula la altura del trapecio.

*7. Un terreno situado entre dos calles tiene la forma de un



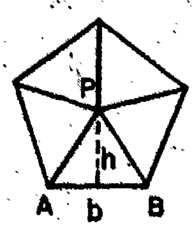
trapecio, y se va a vender a 30¢ el pie cuadrado. Usando las medidas indicadas en la figura,

(a) calcula el área en pies cuadrados.

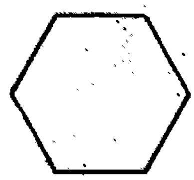
(b) determina el precio de venta del terreno.

Area de un polígono regular

(a)



(b)



Recuerda que un polígono regular se define como un polígono en el que tanto los lados como los ángulos tienen iguales medidas.

Une el centro del polígono regular con cada uno de sus vértices. (El centro es un punto del interior que está a distancias iguales de los vértices y a iguales distancias de los lados del polígono.) Si hay n vértices, habrá n triángulos congruentes.

El área de cualquier polígono regular será la suma de las áreas de los triángulos. En la figura (a), por ejemplo, hallaremos primero el área del triángulo APB:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}hb$$

Puesto que hay cinco de estos triángulos, entonces

$$A_{\pentagon} = \frac{1}{2}hb + \frac{1}{2}hb + \frac{1}{2}hb + \frac{1}{2}hb + \frac{1}{2}hb$$

$$= \frac{1}{2}h(b + b + b + b + b)$$

Pero $(b + b + b + b + b)$ es la medida del perímetro del polígono. Entonces $A_{\pentagon} = \frac{1}{2}hp$.

Supón que el polígono regular tiene diez lados en vez de cinco. Entonces las rectas que van del centro a los diez vértices dividirán al polígono en diez triángulos congruentes y el área del polígono será igual a

$$\frac{1}{2}h(10b) = \frac{1}{2}hp$$

donde p es el perímetro del polígono.

En vista de todo esto, el área de un polígono regular cualquiera es igual a

$$\frac{1}{2}hp$$

donde p es el perímetro y h es la altura de uno de los triángulos congruentes en los cuales queda dividido el polígono por las rectas que van de su centro a sus vértices.

Ejercicios 11-1c

Halla las áreas de los siguientes polígonos regulares:

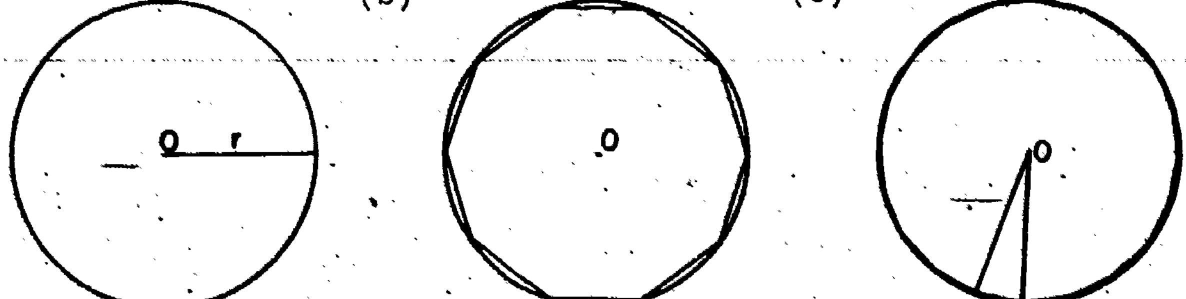
	Clase de polígono	Longitud de la perpendicular del centro a un lado	Longitud de un lado
1.	Hexágono	17.3 plg.	20 plg.
2.	Pentágono	27.5 plg.	40 plg.
3.	Octógono	72.5 pies	60 pies
4.	Decágono	30.8 plg.	20 plg.

Area de un círculo

Ahora veremos cómo la fórmula que acabamos de encontrar puede servir para determinar la fórmula del área de un círculo a partir de la fórmula de la longitud de la circunferencia de ese círculo.

Considera el círculo O en las siguientes figuras:

(a) (b) (c)



Decimos que un polígono regular de n lados está inscrito en una región circular si los vértices del polígono regular son puntos de la circunferencia. En las figuras anteriores se ve claramente que cuantos más lados tiene el polígono inscrito, menor es la longitud de cada lado. También observarás que a medida que n crece, es cada vez más difícil distinguir el polígono regular de la circunferencia.

Podríamos decir que el área del interior del polígono inscrito es aproximadamente igual al área del círculo. Es cierto que el área del polígono inscrito siempre será menor que el área del círculo, pues siempre habrá puntos de la circunferencia que no son vértices del polígono regular inscrito. Por consiguiente, siempre hay alguna porción del área del círculo que no está contenido en el interior del polígono inscrito. Sin embargo, para valores grandes de n, las áreas son casi iguales. Podríamos imaginar el área del círculo como el "límite superior" del área de los polígonos inscritos, es decir la diferencia

(área del círculo) - (área del polígono)

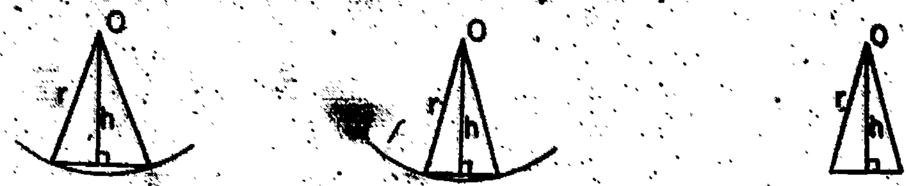
es mayor que cero, pero es muy pequeña si el número de lados del polígono es muy grande. En efecto, tomando el número de lados suficientemente grande, esta diferencia puede hacerse tan pequeña como se quiera.

También, cuando n crece, la distancia del centro del polígono a un lado estará cada vez más cerca del radio de la circunferencia; análogamente, el perímetro del polígono estará cada vez más próximo de la longitud de la circunferencia. Hemos visto que el número de unidades cuadradas de área en un polígono es $\frac{1}{2}hp$. Pero acabamos de ver que cuando n es muy grande, h se aproxima a r y p se aproxima a $2\pi r$; entonces, podemos concluir:

Si r es el número de unidades de longitud en el radio de una circunferencia, y A el número de unidades cuadradas del área de su interior, entonces

$$A = \frac{1}{2}r(2\pi r)$$

$$A = \pi r^2$$



Ejercicios 11-1d

1. Calcula el área de cada uno de los círculos que siguen. Las longitudes se indican en pulgadas. Da tu respuesta en términos de π.

   (a) $r = 5$ (d) $r = 4\frac{1}{2}$

   (b) $r = 10$ (e) $d = 30$

   (c) $r = 20$ (f) $d = 28$

2. Examinando los resultados de (a), (b) y (c) del problema 1, indica el efecto que sobre el área de un círculo tiene el duplicar su radio.

3. PROBLEMA DIFICIL.

   (a) Imagina que has inscrito un polígono regular de 20 lados en una circunferencia y que tienes dividido el polígono en 20 triángulos congruentes mediante rectas que unen su centro con cada vértice. Muestra que estos triángulos pueden ser dispuestos en un paralelogramo cuya altura es casi igual al radio de la circunferencia y la longitud de cuya base es casi la mitad de la circunferencia.

   (b) Imagina que has circunscrito un polígono regular de n lados (n muy grande) alrededor de la circunferencia O. (Esto significa que cada lado del polígono regular contiene exactamente un punto de la circunferencia.) Desarrolla un argumento razonable para justificar el enunciado siguiente:

   (área del círculo) < (área del polígono circunscrito)

   Agregado esto a nuestra consideración anterior, da por resultado:

(área del polígono inscrito) < (área del círculo) <
(área del polígono circunscrito).

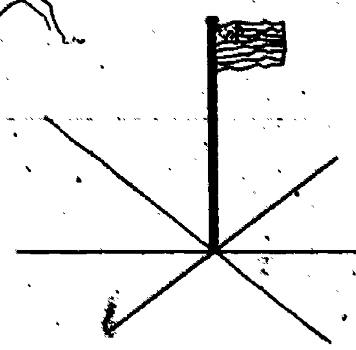
11-2. Planos y rectas

En las próximas secciones de este capítulo estudiarás las áreas superficiales y los volúmenes de los sólidos. Al final de este capítulo hallarás algunos modelos de sólidos que te pueden ayudar en tu estudio. Tu profesor te explicará cómo se construyen esos modelos. En esta sección, así como en el resto del capítulo, nos referiremos a ellos.

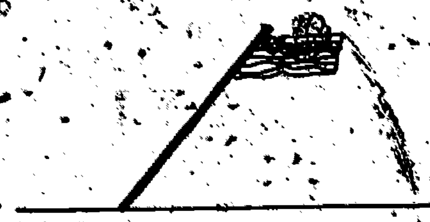
Antes de estudiar esta sección, construye los modelos 4, 5 y 7; las directivas se encuentran al final del capítulo. Observa que si mides las longitudes de los segmentos de las figuras, hallarás que las longitudes marcadas 4 pulgadas, por ejemplo, en realidad no tienen 4 pulgadas. Pero los dibujos están a escala; es decir, como $1\frac{1}{2}$ es tres octavos de 4, la longitud marcada $1\frac{1}{2}$ pulgadas es tres octavos de la longitud marcada 4 pulgadas.

Antes de proseguir, revisemos brevemente algunas de las ideas más simples sobre planos y rectas. Ya estás algo familiarizado con los planos paralelos. Son planos que no tienen ningún punto común, es decir, cuya intersección es el conjunto vacío. Un ejemplo de tales planos está sugerido por el piso y el techo de algunos salones de clase, o por pisos diferentes de una casa de apartamentos, o por las pastas de un libro cuando el libro está cerrado. Presenta por lo menos cinco ejemplos de pares de planos paralelos sugeridos por los objetos que hay en tu salón de clase.

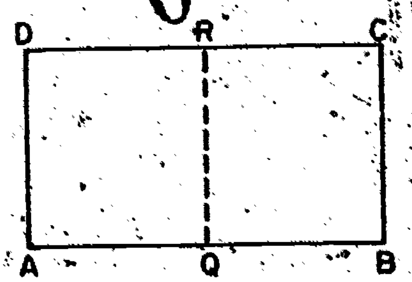
Imagina el asta de una bandera colocada en el centro de un patio cuyo piso está bien nivelado y las rectas del piso que pasan por la base del asta, como se indica en la figura. ¿Qué relación parece haber entre la línea representada por el asta de la bandera y esas rectas sobre el piso? La experiencia nos dice que el asta

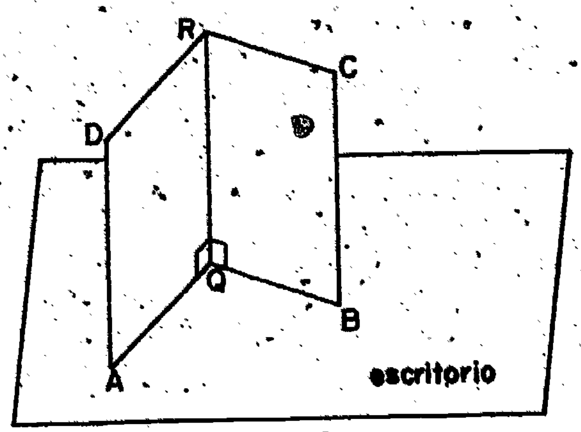


es perpendicular a cada una de esas rectas. En efecto, si no fuera así, vista de cierto ángulo, el asta de la bandera aparecería como en la figura a la derecha; lo que no está de acuerdo con nuestras observaciones. Describimos esta relación diciendo que el asta es perpendicular al piso. En general, una recta que interseca a un plano en un punto A se llama perpendicular al plano si es perpendicular a toda recta del plano que pase por A. Si un segmento está sobre una recta perpendicular a un plano, diremos que el segmento es perpendicular al plano.



Ahora ensaya el siguiente experimento simple. Toma una hoja de tu cuaderno de notas y dóblala de manera que $\overline{AD}$ caiga sobre $\overline{BC}$. El doblez que has hecho está representado por el segmento punteado $\overline{QR}$. Entonces $\angle AQR$ y $\angle BQR$ son rectos. ¿Cómo lo sabes? Ahora toma el papel y colócalo sobre tu escritorio como se indica en la figura, en la posición de un libro parcialmente abierto, de manera que los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{BQ}$ estén sobre el tablero del escritorio. ¿Estarás de acuerdo en que $\overline{QR}$ es ahora perpendicular al tablero del escritorio? Si es así, observa que has obtenido una recta perpendicular a un plano haciéndola perpendicular a exactamente dos rectas diferentes en el plano. Esto ilustra la siguiente propiedad de las perpendiculares:



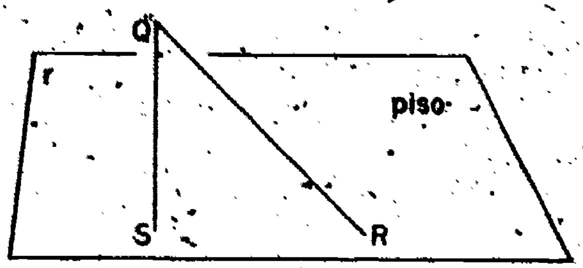


Propiedad 1. Si una recta es perpendicular a dos rectas diferentes que se intersecan determinando un plano, es perpendicular al plano.

Si quieres comprobar que el árbol de Navidad está colocado perpendicularmente al piso, míralo desde dos puntos diferentes. Si esos dos puntos y el árbol no están sobre una misma recta, el árbol está perpendicular desde todos los puntos de vista. Esta es una aplicación de la propiedad 1.

Como un ejemplo más, examina el modelo 5 y mira uno de los segmentos que conecta un vértice de un extremo hexagonal con un vértice del otro. Cómo ves, este segmento es una parte de dos rectángulos. Por consiguiente, es perpendicular a dos segmentos de cada hexágono. Por la propiedad 1 el segmento es perpendicular a los planos de ambos hexágonos. Análogamente, examina el modelo 4 y convéncete de que toda arista del sólido es perpendicular a los planos de dos de sus caras rectangulares. Observa la recta en que se intersecan dos de las paredes de tu salón de clase. ¿Qué relación tiene con los planos del techo y del suelo? Examina el modelo 7 para convencerte de que el resultado se aplica también a él.

Ahora ensaya otro experimento. Haz un nudo en un extremo de una cuerda en un punto conveniente Q de tu salón de clase, que tenga algún espacio libre debajo. Si no tienes nada conveniente a mano, átalo a una vara colocada sobre los respaldos de un par de sillas, asegurando los extremos para que no se muevan. Luego toma un punto R sobre el piso y mide la longitud que tiene la cuerda que une Q y R. Variando R, trata de hallar el punto S sobre el piso que requiere el mínimo de longitud de cuerda. Cuando hayas localizado el punto S, observa la posición $\overline{QS}$ de la cuerda. ¿Qué relación parece tener con el piso? ¿Estarías de acuerdo con el siguiente enunciado?



<u>Propiedad 2.</u> <u>El segmento más corto desde un punto Q que se halla fuera de un plano r al plano r,</u>

es el segmento perpendicular a ese plano.

Esta distancia más corta se llama la distancia de Q a r.

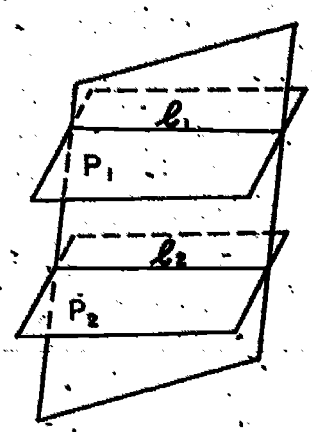
Imagina ahora varios clavos en el cielo raso de tu cuarto, a cada uno de los cuales está atada una cuerda. Además, en cada caso la cuerda está sujeta al punto del piso más cercano del clavo, como en nuestro experimento anterior. ¿Qué sabes respecto de las longitudes de las diferentes cuerdas? ¿Serán todas iguales? Esto ilustra el siguiente hecho:

Propiedad 3. Si dos planos son paralelos, las distancias perpendiculares de diferentes puntos de un plano al otro plano son iguales.

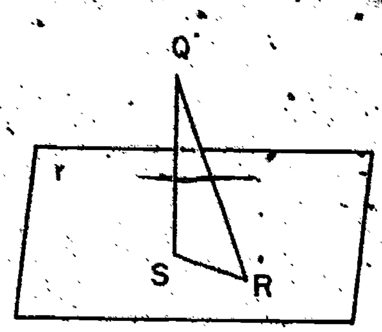
La distancia constante de la propiedad 3 se llama la distancia entre los planos paralelos. En realidad, los segmentos correspondientes de la propiedad 3 son perpendiculares a ambos planos. Ya hemos hecho notar esto para las aristas laterales de un prisma recto.

Ejercicios 11-2

1. Da cinco ejemplos de pares de planos paralelos con rectas perpendiculares a ambos planos en cada ejemplo.
2. Examina los modelos 4 y 7. Anota los conjuntos de planos paralelos y la distancia entre ellos.
3. Construye los modelos 9 y 10. Anota los conjuntos de planos paralelos y las distancias entre ellos.
4. Si los dos planos paralelos, P_1 y P_2, se intersecan a lo largo de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 con un plano π, entonces ℓ_1 debe ser paralela a ℓ_2. Explica por qué es esto cierto.



5. Hubiéramos podido demostrar la propiedad 2 en lugar de observarla experimentalmente. Da las razones de la siguiente demostración:



Sea S un punto del plano r de manera que $\overline{QS}$ sea perpendicular a r. Dibuja el segmento $\overline{SR}$.

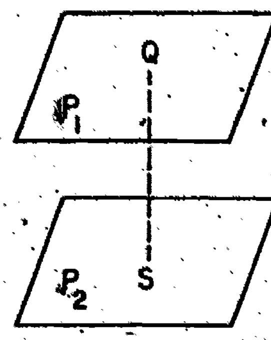
(a) $\angle$ QSR es un ángulo recto. ¿Por qué?

(b) $\overline{QR}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo. ¿Por qué?

(c) $\overline{QR}$ es más largo que $\overline{QS}$. ¿Por qué?

Pero, como R es un punto cualquiera de r diferente de S, esto muestra que $\overline{QS}$ es el segmento más corto.

6. PROBLEMA DIFICIL. Un segmento $\overline{QS}$ tiene sus extremos sobre los planos paralelos P_1 y P_2. Si $\overline{QS}$ es perpendicular a P_2, demuestra que debe también ser perpendicular a P_1. (Sugerencia: Dibuja dos planos que pasen por $\overline{QS}$.)



11-3. Prismas rectos

Como ya has estudiado algunos ejemplos de prismas rectos, esta sección tendrá el carácter de un repaso. ¿Recuerdas qué clase de figura es un prisma recto? Repasemos su descripción.

Imagina dos polígonos congruentes colocados en planos paralelos de manera que cuando se trazan los segmentos que unen los vértices correspondientes de los polígonos, los cuadriláteros formados son rectángulos. Estos rectángulos y los polígonos originales determinan regiones cerradas. La reunión de estas regiones cerradas se llama un prisma recto. Los segmentos son sus aristas, y los puntos en que se intersecan dos o más aristas son sus vértices. Las regiones rectangulares cerradas se llaman

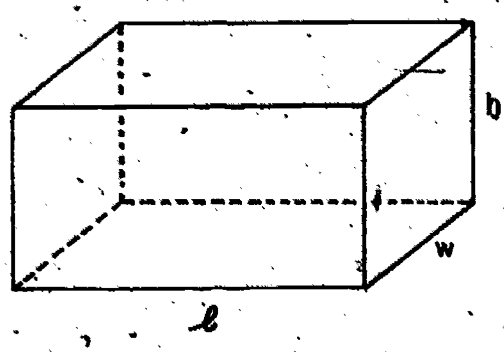
caras laterales (o caras). Las regiones poligonales cerradas originales se llaman las bases. Los segmentos que unen los vértices correspondientes de las dos bases se llaman aristas laterales. Es conveniente recalcar que las aristas laterales son perpendiculares a ~~las bases, y que~~, en ~~efecto, si las~~ aristas laterales son perpendiculares a las bases, las caras son automáticamente rectángulos.

Un prisma recto es triangular, rectangular, hexagonal, etc., según la forma de sus bases. Considera los modelos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. (Construye aquellos modelos de este conjunto que todavía no hayas construido.) Estos son ejemplos de prismas rectos.

Recuerdas cómo hallar el área total y el volumen de los prismas rectos. El área total es la suma de las áreas de las bases y de las caras. El volumen es el producto de la medida del área de una base y la medida de la altura.

Prismas rectos rectangulares (ortoedros)

Un prisma recto con el que estás bastante familiarizado es el prisma recto rectangular. (V. la figura.) Un buen ejemplo de tal prisma es una caja de cereales.



Representaremos las medidas de su largo, ancho y alto con las letras ℓ, w y h, respectivamente. Además, representaremos con S la medida de su área total y con V la medida de su volumen. Recuerda las fórmulas

$$S = 2(\ell w + \ell h + wh)$$

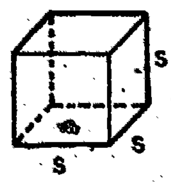
$$V = \ell wh \quad ó \quad V = Bh$$

donde B es la medida del área de la base ($B = \ell w$). Observarás que en un prisma de este tipo todas las caras son rectángulos, de

manera que las caras de cualquier par de caras paralelas pueden ser consideradas como bases. ¿Puedes enunciar estas fórmulas en palabras? Trata de hacerlo.

Cubos

Un cubo es un caso especial de prisma recto rectangular en el que todas las aristas son congruentes. Designa la medida de sus aristas con s, como en la figura que sigue. Estudia nuevamente el modelo 1.



Puesto que un cubo es un prisma recto, su área total y su volumen se obtienen de la misma manera que en el caso del prisma recto rectangular. Las fórmulas, sin embargo, pueden abreviarse, pues para un cubo

$$\ell = w = h = s \quad .$$

La fórmula para el área total puede transformarse así:

$$S = 2(\ell w + \ell h + wh)$$

$$S = 2(s \cdot s + s \cdot s + s \cdot s)$$

$$S = 2(s^2 + s^2 + s^2)$$

$$S = 2(3s^2)$$

$$S = 6s^2$$

La fórmula del volumen de un cubo puede transformarse de manera análoga:

$$V = \ell wh$$

$$V = s \cdot s \cdot s$$

$$V = s^3$$

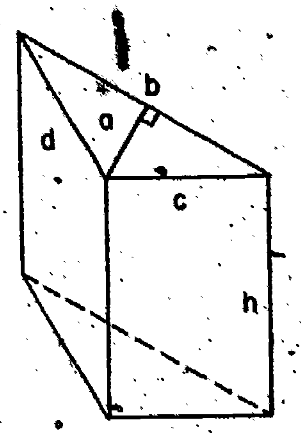
Como ejemplo, toma un cubo en el cual la medida de las aristas es 2. Como $s = 2$, entonces

$$S = 6 \cdot 2^2 = 6 \cdot 4 = 24$$

$$V = 2^3 = 8$$

Prisma recto triangular

Este es otro prisma que ya has estudiado. Toma nuevamente el modelo 6: las bases son regiones triangulares rectas; sin embargo, la base de un prisma recto triangular puede ser cualquier tipo de región triangular. Considera la figura siguiente: Sean b, c, d y a las medidas de las aristas y de una altura de las bases triangulares, respectivamente. Además, sea h la medida de las aristas laterales del prisma. Ahora desarrollemos las fórmulas para el área total y el volumen de este tipo de prisma.



Como el área total es la suma de las áreas de las bases y de las caras, tenemos

$$S = 2(\tfrac{1}{2}ab) + (hb + hc + hd)$$

$$S = ab + h(b + c + d)$$

$$S = ab + hp$$

donde p es la medida del perímetro de la base triangular.

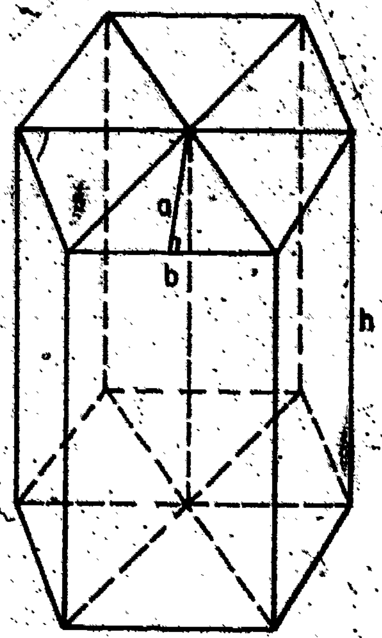
Ya has usado antes la fórmula del volumen, pero la daremos a manera de repaso:

$$V = \tfrac{1}{2}abh \quad \text{ó} \quad V = Bh$$

donde B es la medida del área de la base.

Prisma recto hexagonal

También estás familiarizado con este prisma. Estudia tu modelo 5. Las bases pueden ser cualquier región poligonal de seis lados; sin embargo, consideremos solamente los hexágonos regulares. Mira la siguiente figura:



Sea h la medida de las aristas laterales, b la de las aristas de las bases y a la de las alturas de los triángulos en que se dividen las bases. Las fórmulas para S y V son

$$S = ap + hp$$

en que, como recuerdas, p es la medida del perímetro del hexágono;

$$V = \frac{1}{2}aph \quad \text{ó} \quad V = Bh$$

donde B es la medida del área de la base.

Cilindros rectos circulares

Un cilindro recto circular, que ya has estudiado antes, no es un prisma. Se presenta aquí, sin embargo, porque la fórmula para hallar su volumen tiene la misma forma general que la de los prismas rectos. Es decir, $V = Bh$, donde B es la medida de la base. Recuerda que $B = \pi r^2$, donde r es la medida del radio de la base circular. Entonces la fórmula es

$$V = \pi r^2 h.$$

Recordarás que la fórmula para el área total es

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

que se puede escribir como $S = 2\pi r(h + r)$.

Ejercicios 11-3

1. Calcula el volumen de cada uno de los prismas rectos rectangulares cuyas medidas en pulgadas son:
   (a) $\ell = 1, \quad w = 2, \quad h = 2$
   (b) $\ell = 2\frac{1}{2}, \quad w = 2, \quad h = 2$
   (c) $\ell = 1\frac{1}{2}, \quad w = 1\frac{1}{2}, \quad h = 2$
2. Calcula el área total de cada prisma recto rectangular del problema 1.
3. Determina el área total y el volumen del modelo 6.
4. Suponiendo que la base de un prisma recto rectangular permanece invariable y que la medida de su arista lateral se duplica, ¿cuál es el efecto sobre el volumen? ¿Cuál es el efecto sobre la suma de las áreas de las caras laterales?
5. Suponiendo que tanto ℓ como w para un prisma recto rectangular se duplican y que la arista lateral permanece invariable, ¿cuál es el efecto sobre el volumen? ¿Cuál es el efecto sobre la suma de las áreas de las caras laterales?
6. Si tanto ℓ como w y h se duplican para un prisma recto rectangular, ¿cuál es el efecto sobre el volumen? ¿Cuál es el efecto sobre la suma de las áreas de las caras laterales? ¿Y sobre el área total?
7. Construye el modelo 8. Determina el área total de su superficie y el volumen.
8. (a) Toma los moldes de los modelos 4, 5, 7 y 8 y determina el perímetro de las bases.
   (b) ¿Son todos estos perímetros iguales entre sí?
   (c) Calcula los volúmenes de estos cuatro modelos. Emplea tu regla para conseguir cualquier medida adicional que necesites.
   (d) ¿Son iguales los volúmenes?
   (e) Haz una lista de los modelos según el orden creciente de las medidas de sus volúmenes.
   (f) Sobre la base de tu experiencia en este problema, ¿qué conjetura ("conjetura" es una palabra clave con que designamos una suposición inteligente) harías sobre el área

de un círculo en comparación con las áreas de los polígonos cuyos perímetros son iguales a la longitud de la circunferencia de ese círculo?

9. (a) Cuando calculaste los volúmenes de los modelos 4 y 6, ¿hallaste que son iguales?

(b) Verifica (a) llenando uno con sal y vaciándolo dentro del otro.

(c) Determina los perímetros de las bases de esos modelos. ¿Son los perímetros iguales?

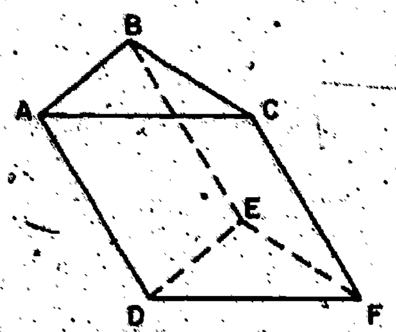
11-4. Prismas oblicuos

Ahora que hemos repasado los prismas rectos, estudiaremos prismas generales, de los cuales los rectos y los oblicuos son casos especiales. Los modelos 9, 10, 11 y 12 son ejemplos de prismas oblicuos. La descripción de los prismas oblicuos es muy semejante a la que has estudiado en la Sección 11-3 para los prismas rectos. Un prisma oblicuo se puede describir así:

Consideremos nuevamente dos polígonos congruentes. Imagina que están colocados en planos paralelos de manera que cuando se trazan los segmentos que unen los vértices correspondientes de los polígonos, los cuadriláteros formados son paralelogramos, de los cuales por lo menos dos no deben ser rectángulos. Esto significa que las aristas laterales no son perpendiculares a las bases. Estos paralelogramos y los polígonos originales determinan regiones cerradas. La reunión de esas regiones cerradas se llama <u>prisma oblicuo</u>. Los segmentos son las aristas, los puntos en que se encuentran dos o más aristas se llaman vértices. Las regiones cerradas formadas por los paralelogramos se llaman <u>caras laterales</u> (o caras). Las regiones poligonales cerradas originales se llaman <u>bases</u>. Los segmentos que unen vértices correspondientes de las dos bases se llaman <u>aristas laterales</u>.

¿En qué difiere la descripción anterior de la que dimos para los prismas rectos?

Se puede ilustrar un prisma oblicuo mediante la siguiente figura, en que los triángulos ABC y DEF, en planos paralelos, son las bases.



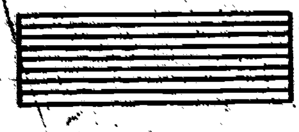
Los paralelogramos ABED, ACFD y CBEF son las caras laterales. Las aristas laterales son $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$. Los modelos 9, 10, 11 y 12 te ayudarán a comprender esto mejor. En particular, compara los modelos 6 y 11 señalando las bases, caras laterales y aristas laterales.

Luego haz lo mismo con los modelos 7 y 9. En estos últimos casos, ¿has tenido alguna dificultad en identificar las bases? ¿Cómo lo decidiste? Esta dificultad ilustra una interesante propiedad de los modelos 4, 7, 9 y 10. En estos modelos todas las caras son paralelogramos. (Recuerda que un rectángulo es un caso particular de paralelogramo.) En estas figuras las caras de todo par de caras opuestas pueden ser consideradas como bases y las otras caras, como caras laterales. Tales figuras se pueden realmente imaginar como prismas de tres maneras. Como sus caras son paralelogramos, se ha dado a esos prismas el nombre kilométrico de paralelepípedos. Los prismas rectangulares que has estudiado antes son paralelepípedos especiales en que todas las caras son rectángulos.

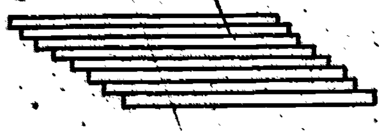
Como en el estudio de los prismas rectos, nos interesamos por hallar el área total y el volumen de los prismas oblicuos. No hay dificultad para hallar el área total, pues se la obtiene sumando las áreas de las bases y de las caras laterales. Naturalmente, para hallar las áreas de las caras laterales, debes calcular áreas de paralelogramos en vez de rectángulos.

Consideremos ahora el volumen de un prisma oblicuo. Esto requerirá un poco más de estudio. Para comenzar, consideremos una pila de tarjetas rectangulares congruentes. Puedes construir esa pila o usar cartas o naipes. Cuando estén apiladas de manera que todas las cartas adyacentes coinciden exactamente, tienes una

ilustración de un prisma recto semejante a lo que muestra, en sección transversal, la siguiente figura:



Ahora empuja las tarjetas un poquito de manera que la pila tome, en sección transversal, el siguiente aspecto:



Así logras una ilustración de prisma oblicuo. Naturalmente, no es un prisma perfecto debido al espesor de las tarjetas, que ya no coinciden exactamente. Al pasar la uña por las aristas, sentirás la rugosidad de los bordes, la que también saltará a la vista si las tarjetas están suficientemente inclinadas respecto de la vertical. Las irregularidades parecerán aún más pequeñas si empleamos papel más delgado.

Consideremos ahora una analogía entre las dos pilas que se han ilustrado anteriormente. Observa que las bases son congruentes y que las distancias entre las bases son iguales. En vista de esta consideración, parece que tenemos base suficiente para hacer la siguiente conjetura:

> Si dos prismas tienen bases congruentes y alturas iguales, tienen volúmenes iguales.

Para verificar esta conjetura, toma los modelos 6, 11 y 12. ¿Te parece que sus bases son congruentes? ¿Tienen iguales alturas? Para verificar esto, será mejor apoyarlas sobre sus bases inferiores y pasar una regla sobre sus bases superiores para ver si están al mismo nivel. ¿Estás de acuerdo en que estos modelos tienen bases congruentes y alturas iguales? Ahora llena el modelo 6 con sal y vacíalo en el modelo 11. ¿Tendrás mucha o poca sal, o habrá suficiente? (¡Esto está resultando como el caso de los tres osos!) ¿Crees que los resultados de este experimento confirman la conjetura anterior?

Efectúa el mismo experimento con los modelos 7, 9 y 10. (Para este experimento considera los paralelogramos pequeños como bases, pues de otra manera no obtendrías bases congruentes.) ¿Opinas que este resultado confirma la conjetura?

Como la conjetura parece confirmada por la práctica, pondremos en nuestra lista esta nueva propiedad:

<u>Propiedad 4.</u> <u>Si dos prismas tienen bases congruentes y alturas iguales, tienen volúmenes iguales.</u>

Por la propiedad 4, el volumen de cualquier prisma es igual al de un prisma recto de la misma altura y cuya base es congruente con la del prisma dado. Como sabemos calcular el volumen de un prisma recto, sabemos que:

> El número de unidades cúbicas de volumen en cualquier prisma se obtiene por la fórmula
>
> $$V = Bh.$$

donde B es el número de unidades cuadradas del área de su base y h es el número de unidades de longitud de su altura.

Por ejemplo, la base del modelo 11 es un triángulo rectángulo cuyos lados tienen aproximadamente 2 pulgadas y $2\frac{1}{4}$ pulgadas de longitud. Verifica estas medidas en tu modelo. El número B de pulgadas cuadradas del área de la base es, por consiguiente,

$$B = \frac{1}{2}(2)(2\tfrac{1}{4}) = \frac{9}{4}$$

Entonces el área de la base es $\frac{9}{4}$ de pulgada cuadrada. ¿Por qué? Hallarás que la altura tiene 4 pulgadas. (Observa que esta longitud no es igual a la de las aristas laterales, que es de $4\frac{1}{8}$ pulgadas.) Entonces $h = 4$.

$$V = (\tfrac{9}{4})4 = 9$$

y el volumen es 9 pulgadas cúbicas.

Ejercicios 11-4

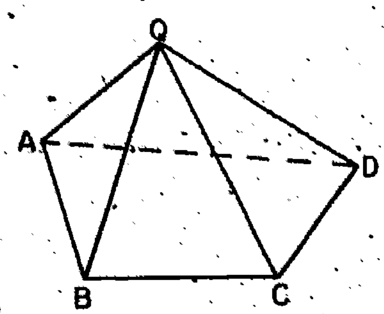
1. Verifica la exactitud del último cálculo tomando tu medida de pulgada cúbica, modelo 1, y viendo si el modelo 11 se llena con 9 cargas completas del modelo 1.
2. ¿Es una arista lateral de un prisma recto una altura del prisma? ¿Por qué?
3. ¿Es una arista lateral de un prisma oblicuo una altura del prisma? ¿Por qué?
4. Para hallar el volumen de un prisma oblicuo, un estudiante accidentalmente usa la longitud de una arista lateral en lugar de la altura del prisma. Si no comete otros errores, ¿será su respuesta demasiado grande o demasiado pequeña?
5. ¿Deben ser congruentes todas las aristas laterales de un prisma? ¿Por qué sí o por qué no?
6. Dos caras de un prisma se llaman adyacentes si tienen una arista lateral común. Muestra que si dos caras adyacentes de un prisma son rectángulos, el prisma es recto.
7. Muestra que si una arista lateral de un prisma es congruente con su altura, el prisma es recto.
8. Si se duplica la altura de un prisma, sin alterar ni su base ni sus ángulos, ¿cuál es el efecto sobre el volumen?
9. Si se duplican todas las aristas de un prisma rectangular y se deja invariable su forma, ¿cómo varía el volumen?

11-5. Pirámides

Construye y examina cuidadosamente los cinco modelos 13, 14, 15, 16 y 17. Son ejemplos de pirámides. ¿Qué propiedad común observas en esos cinco modelos?

Puedes observar en cada caso que se trata de una figura obtenida uniendo los vértices de un polígono con un punto que no está en su plano, formando de esta manera triángulos. La pirámide consiste en las regiones triangulares cerradas y en la región cerrada del polígono original. La región cerrada del polígono original se llama base de la pirámide y las otras caras, caras laterales. El punto al cual se unen los vértices del polígono se llama cúspide de la pirámide. (Muchos libros llaman

vértice de la pirámide a este punto, pero hemos escogido el término "cúspide" porque toda esquina del polígono también se llama vértice.) Las aristas que se encuentran en la cúspide se llaman aristas laterales. Por ejemplo, en la figura de la derecha, la base es el interior del cuadrilátero ABCD; las caras laterales son las regiones cerradas de los triángulos ABQ, BCQ, CDQ y DAQ; las aristas laterales son $\overline{AQ}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CQ}$ y $\overline{DQ}$; y la cúspide es Q.



Señala las bases, caras laterales, aristas laterales y la cúspide de cada uno de los modelos 14 y 16.

Observa que en los modelos 13, 15 y 16 las bases son regiones cuadradas cerradas. Esas pirámides se llaman cuadrangulares. De modo análogo, el modelo 14 es una pirámide hexagonal. ¿De qué clase de pirámide es el modelo 17? ¿Por qué?

Aunque probablemente no habría reparos a la respuesta de la última pregunta, podría haber desacuerdo al identificar la base. Puesto que todas las caras son regiones triangulares cerradas, ¿cómo distinguimos cuál es la base? La respuesta, por supuesto, es que no podemos distinguirla. Cualquiera de las cuatro caras puede servir de base, de manera que esta figura puede ser considerada como pirámide triangular de tres maneras diferentes. (Compara este caso con el del paralelepípedo que se puede considerar como prisma de tres maneras.) Debido a que esta figura tiene exactamente cuatro caras, se la llama generalmente tetraedro. Un tetraedro con su interior se llama a veces un 3-símplex, como se explicó en detalle en el Capítulo 10.

Ahora mira nuevamente los cinco modelos de pirámides. En cada caso imagina el segmento trazado perpendicularmente desde la cúspide al plano de la base. Este segmento se llama altura de la pirámide, y el mismo nombre se usa para su medida, deduciéndose trivalmente del contexto en qué sentido se está considerando cada vez. Compara las alturas de los modelos 13, 14, 15 y 16. Si

colocas una regla sobre ellos podrás estimar mejor sus alturas. ¿Encuentras que los modelos tienen alturas iguales? El modelo 17 tiene cuatro alturas, que dependen de la cara que se toma como base. Toma como base la región triangular más pequeña y compara la altura con la de los otros modelos. ¿Te parece que los cinco modelos tienen la misma altura?

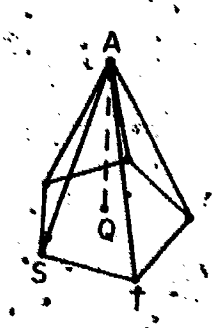
No siempre es fácil imaginar dónde está justamente el pie de la altura de una pirámide. En uno de los modelos la altura coincide con una de las aristas laterales, de manera que el pie de la altura es un vértice de la base. Localiza el modelo y la arista. En otro modelo el pie de la altura está completamente fuera de la base. ¿Qué modelo es? Para los otros tres, el pie de la altura está en algún punto en el interior de la base.

Las pirámides más simétricas se llaman <u>pirámides regulares</u>. Para ser regular, una pirámide debe reunir dos condiciones: Primero, su base debe ser una región poligonal regular cerrada. (Polígono regular es uno cuyos lados y ángulos son congruentes entre sí.) ¿Cuáles de los modelos cumplen la primera condición? Segundo, el pie de la altura debe estar en el centro de este polígono regular. ¿Cuáles de los modelos te parecen pirámides regulares?

En los problemas siguientes se muestra que la segunda condición es en realidad la misma que decir que las aristas laterales tienen todas igual longitud, hecho que es fácil de reconocer a simple vista en el modelo.

Ejercicios 11-5

1. Observa la figura. Se supone que presenta una pirámide pentagonal regular con cúspide A y altura $\overline{AQ}$. Como Q está en el centro del pentágono, está a la misma distancia de S que de T. Supón que $\overline{AQ}$ tiene 4 pulgadas de longitud y $\overline{QT}$ y $\overline{QS}$ tienen 3 pulgadas de longitud cada uno.



(a) ¿Cómo puedes hallar las longitudes de $\overline{AS}$ y de $\overline{AT}$?
(b) ¿Cuáles son las longitudes?
(c) ¿Tienen $\overline{AS}$ y $\overline{AT}$ iguales longitudes?
(d) ¿Es el triángulo AST isósceles?
(e) ¿Puede usarse el razonamiento anterior para mostrar que las aristas laterales tienen la misma longitud?

2. (a) ¿Depende el razonamiento del último problema del hecho de que la base es una región pentagonal, o valdría igualmente para toda región poligonal regular?
(b) ¿Depende el razonamiento de las longitudes particulares dadas, o se podría aplicar a longitudes cualesquiera?
(c) Completa el siguiente enunciado:

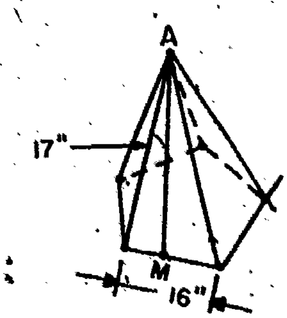
Si una pirámide es regular, entonces sus ________ son todas congruentes.

3. Vuelve a la figura del problema 1 con base pentagonal regular, pero esta vez supón que sabemos que todas las aristas laterales tienen la misma longitud, pero no sabemos dónde está el pie Q de la altura. Concretando, supón que la altura del prisma (es decir, la longitud de $\overline{AQ}$) es 12 pulgadas, y que cada una de las aristas laterales $\overline{AS}$ y $\overline{AT}$ tiene 13 pulgadas de largo.
(a) ¿Cómo puedes hallar las longitudes de $\overline{QS}$ y $\overline{QT}$?
(b) ¿Cuáles son esas longitudes?
(c) ¿Son iguales?
(d) ¿Puede usarse este razonamiento para mostrar que las distancias de Q a los cinco vértices del polígono son iguales?
(e) ¿Prueba esto que Q es el centro del polígono regular?
(f) ¿Es la pirámide regular?

4. (a) ¿Depende el razonamiento del problema 3 de las medidas particulares y del hecho de que la base es un pentágono?
(b) Si no es así, completa el siguiente enunciado:

Si en una pirámide que tiene como base la región cerrada de un polígono regular, las ________ son todas de igual longitud, entonces la pirámide es ________.

5. Construye un modelo de un tetraedro en el cual las cuatro caras sean regiones triangulares equiláteras. Tal figura se llama tetraedro regular.
6. (a) ¿Cuántas alturas tiene un tetraedro regular?
(b) Esas alturas de un tetraedro regular son ________.
7. La base de una pirámide pentagonal regular tiene 16 pulgadas de lado. Si cada una de las aristas laterales tiene 17 pulgadas, calcula el área lateral de la pirámide (la suma de las áreas de las cinco caras laterales).



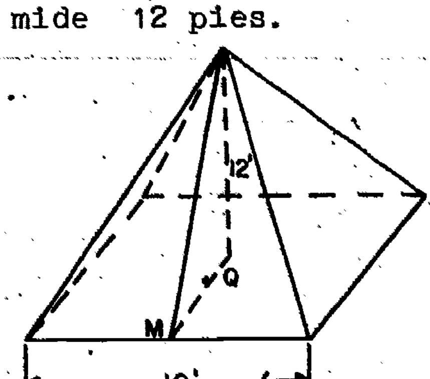
(Sugerencia: Traza el segmento $\overline{AM}$ de la cúspide A al punto medio de un lado del pentágono. Esta es la altura de esa cara triangular. Su longitud se llama la apotema de la pirámide regular. En la figura

$$(AM)^2 + 8^2 = 17^2$$

ó,

$$s^2 + 8^2 = 17^2$$

donde s designa la apotema.)
8. Una pirámide cuadrangular regular tiene una base de 10 pulgadas de lado. Su apotema (consulta el problema anterior) tiene 12 pulgadas.
(a) Calcula su área total (suma del área de las caras laterales de la base).
(b) Determina las longitudes de las aristas laterales.
9. La base de una pirámide cuadrangular regular tiene 10 piés de lado. La altura de la pirámide mide 12 pies.
(a) Calcula el área total.
(b) Determina las longitudes de las aristas laterales. (Sugerencia: ¿Qué distancia hay de Q a M? Usala para hallar la apotema.)



11-6. Volúmenes de las pirámides

¿Podemos ahora hacer algo para hallar los volúmenes de las pirámides?

En el estudio de los prismas nos ha sido útil considerar modelos formados con pilas de tarjetas. Quizá querrías construir un modelo análogo para una pirámide. Si es así, toma un cartón grueso y haz una serie de piezas cuadradas para apilarlas una sobre otra. Como sugerencia, pon al fondo una pieza de 6 pulgadas de lado, la siguiente de $5\frac{7}{8}$ pulgadas de lado, etc., reduciendo $\frac{1}{8}$ de pulgada cada vez. Teóricamente tendrás 48 piezas cuadradas, pero en realidad debes omitir las que están muy arriba, pues serían muy pequeñas para manejarlas. Sin embargo, deberías poder llegar por lo menos hasta un cuadrado de 1 pulgada de lado. Para evitar que las piezas se caigan cuando muevas la pila, haz un agujero en el centro de cada una y luego pasa por él una cuerda, de preferencia elástica, a fin de sujetar firmemente las piezas.

Si quieres construir un modelo más grande, comienza con un cuadrado de un pie de lado. Entonces tendrás el doble de capas y necesitarás un cartón ocho veces más grande. Un modelo de lujo podría hacerse recortando las regiones cuadradas de una pieza de masonita de $\frac{1}{8}$ de pulgada, o de otra madera semejante. El modelo más grande exigiría un poco más de 32 pies cuadrados de material, y el modelo más pequeño, un poco más de 4 pies cuadrados.

Tales modelos te sugerirán de manera convincente una pirámide cuadrangular, a pesar de las irregularidades en las aristas como en el caso del prisma. Desplazando lateralmente las piezas, puedes hacer que este modelo tome aproximadamente todas las formas de pirámides cuadrangulares. Cuando las piezas cuadradas están apiladas con sus agujeros centrales directamente encima uno de otro, aparece como una pirámide regular parecida a nuestro modelo 13. Desplazando las piezas lateralmente, la cúspide ya no estará sobre el centro de la base, y probablemente puedes desplazarlas lo suficiente para que la cúspide esté sobre una esquina de la base, como en el modelo 15, y aún posiblemente hasta la posición del modelo 16 en que la perpendicular desde la cúspide está fuera de la base.

En todos estos movimientos, evidentemente no hemos cambiado ni la base de la pirámide ni su altura, la que es, después de todo,

exactamente igual al espesor de nuestra pila de piezas cuadradas. Además, no hemos cambiado la cantidad de cartón en la pila. Parece, pues, un buen presentimiento el que dos pirámides cualesquiera con bases congruentes y alturas congruentes tengan iguales volúmenes.

Probemos esto ahora con los modelos 13, 15 y 16 que tienen bases cuadradas congruentes y cuyas alturas son iguales, como vimos anteriormente. Llena el modelo 13 con sal y vacíalo en el modelo 15, y luego en el 16. ¿Confirman tus resultados el presentimiento anterior? Sobre la base de este experimento y de la evidencia de nuestro modelo de cartón, escribimos la siguiente propiedad:

<u>Propiedad 5.</u> <u>Si dos pirámides tienen bases congruentes y alturas congruentes, tienen iguales volúmenes.</u>

Sin embargo, para hallar el volumen de una pirámide, debemos compararla con alguna figura cuyo volumen ya conocemos. Como experimento toma el modelo 13, la pirámide cuadrangular regular y el modelo 4 del prisma recto rectangular. ¿Qué relación hay entre las bases de estos dos modelos (si tomamos el cuadrado pequeño como base del modelo 4)? ¿Qué relación hay entre sus alturas? ¿Estás de acuerdo en que tienen bases congruentes y alturas iguales? Evidentemente, el interior del modelo 4 es mucho más grande que el interior del modelo 13, pero ¿cuántas veces más grande? Llena el modelo 13 con sal y vacíalo en el modelo 4. Repite la operación hasta que el modelo 4 esté lleno. Según el resultado de este experimento, ¿cuántas veces más grande es el interior del modelo 4 respecto del interior del modelo 13?

Repite el experimento con los modelos 14 y 5. ¿Obtienes el mismo múltiplo en este caso? Haz un tercer ensayo con los modelos 17 y 6. Sobre la base de estos experimentos, ¿estás de acuerdo con la siguiente propiedad?

<u>Propiedad 6.</u> <u>El volumen de una pirámide es un tercio del volumen de un prisma cuya base es congruente con la base de la pirámide y cuya altura es igual a la altura de la pirámide.</u>

Como sabemos calcular el volumen de un prisma, podemos

escribir la siguiente fórmula para el volumen de una pirámide:

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

donde B representa el número de unidades cuadradas de área de la base y h el número de unidades de longitud de la altura.

Ejercicios 11-6

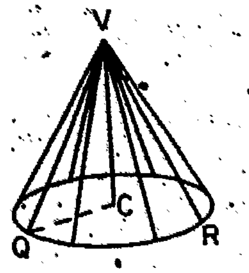
1. Calcula el volumen de las pirámides cuyas dimensiones se indican:
   (a) Area de la base = 12 plg. cd., altura = 7 plg.
   (b) Area de la base = 100 cm.^{2}, altura = 24 cm.
   (c) Area de la base = 14,400 pies cd., altura = 60 pies.
2. El modelo 13 tiene una base cuadrada de $1\frac{1}{2}$ pulgadas de lado y una altura de 4 pulgadas. Comprueba estas medidas con tu modelo. Luego determina el volumen del modelo 13.
3. ¿Cuál es la altura de una pirámide cuyo volumen es 324 metros cúbicos y cuya base es un cuadrado de 9 metros de lado?
4. La pirámide de Cheops en Egipto tiene 480 pies de alto y una base cuadrada de 720 pies de lado. ¿Cuántos pies cúbicos de piedras utilizaron en su construcción? (Supón que la pirámide es sólida.) ¿Cuántas yardas cúbicas?

*5. Calcula el área total de la pirámide triangular regular cuya arista lateral mide 12 pulgadas.

*6. El lado de la base cuadrada de la pirámide se duplica al mismo tiempo que su altura se reduce a la mitad. ¿Cómo varía el volumen?

11-7. Conos

Quien ha tomado un cartucho de helados tiene alguna idea de la figura llamada cono, o más exactamente cono recto circular. Dibujemos una circunferencia de centro C, como se indica a continuación, y sea V un punto que no esté en el plano de la circunferencia de manera que el segmento $\overline{VC}$ sea perpendicular a ese plano.

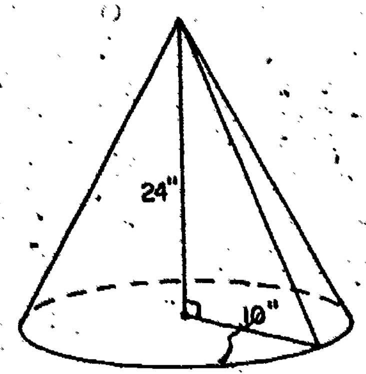


Si se traza los segmentos de V a todos los puntos de la circunferencia, la reunión de todos esos segmentos, juntamente con la región circular cerrada, forma un cono recto circular. La región circular cerrada se llama la base del cono, y la reunión de los segmentos es su superficie lateral. El punto V se llama vértice del cono. En la descripción cono recto circular, la palabra "circular" indica que la base es la región circular cerrada, y la palabra "recto" significa que $\overline{VC}$ es perpendicular al plano de la circunferencia. Consideramos aquí solamente conos rectos circulares, y cada vez que se use la palabra "cono" será para referirse a uno de este tipo.

El segmento $\overline{VC}$ se llama la altura del cono, y la longitud de este segmento es la medida de la altura del cono. Si Q es un punto de la circunferencia, ¿qué clase de triángulo es VCQ? ¿Por qué? Si conoces la medida de la altura del cono y el radio de su base, ¿puedes hallar la longitud de $\overline{VQ}$? ¿Cómo? Si R es otro punto de la circunferencia, ¿tienen $\overline{VQ}$ y $\overline{VR}$ la misma longitud? Los segmentos de longitud constante que unen el vértice V con los puntos de la circunferencia se llaman generatrices del cono.

Si h es el número de unidades de longitud de la altura del cono, r el número de unidades de longitud de su radio y s el número de unidades de longitud de su generatriz, escribe una ecuación que relacione h, r y s. Si conoces dos cualesquiera de esos números, ¿puedes hallar el tercero mediante esa ecuación?

A modo de ejemplo, supón que el radio de la base del cono es 10 pulgadas y que su altura mide 24 pulgadas. ¿Cuál es la longitud de la generatriz? ¿Es 26 pulgadas?



Construye y examina el modelo 18. Señala la base, el vértice y la superficie lateral. ¿Cuál es la longitud aproximada de la generatriz? ¿Es de unas $4\frac{1}{8}$ pulgadas? ¿Es el radio un poco menor de una pulgada? Escribiendo estos números como decimales y redondeando a una cifra decimal, podemos tomar la longitud de la generatriz como 4.1 pulgadas y el radio como 0.9 de pulgada. ¿Qué altura tiene el modelo? Debe ser un número natural exacto.

¿Cómo podemos calcular el volumen de un cono? Supón que seguimos el método usado para las pirámides y comparamos un cono con un cilindro de la misma altura y con la base de igual tamaño. Toma los modelos 18 y 8. Compara sus bases. ¿Son los círculos del mismo tamaño? ¿Te parece que ambos modelos son igualmente altos? ¿Cómo lo compruebas?

Ahora llena con sal el modelo 18 y vacíalo en el modelo 8. Continúa esta operación hasta llenar el modelo 8. Sobre la base de este experimento, ¿cuántas veces más grande es el volumen del modelo 8 respecto del volumen del modelo 18? Esto ilustra la siguiente propiedad:

<u>Propiedad 7.</u> <u>El volumen del interior de un cono es un tercio del volumen de un cilindro que tiene la misma altura y cuya base tiene el mismo radio.</u>

Como ya hemos aprendido a calcular el volumen de un cilindro, obtenemos la siguiente fórmula para el volumen de un cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Como πr^2 es B, el número de unidades cuadradas de área de la base, la fórmula puede escribirse así:

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

La comparación de esta propiedad con la propiedad 6 muestra que tenemos la misma regla para calcular el volumen de un cono que para calcular el volumen de una pirámide.

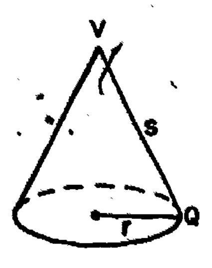
A modo de ejemplo, toma nuevamente el cono antes mencionado, en el que el radio de la base tenía 10 pulgadas y la altura medía 24 pulgadas. Entonces $r = 10$, $h = 24$; así la fórmula anterior da

$$V = \frac{1}{3}\pi(10^2)(24) = 800\pi$$

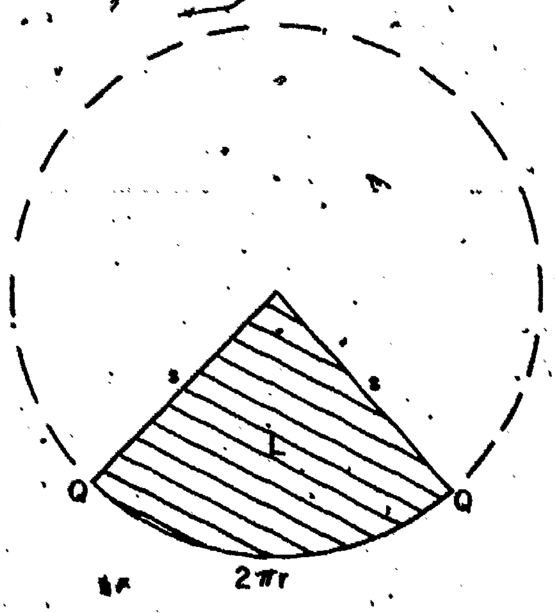
y el volumen es 800π pulgadas cúbicas, es decir, unas 2,512 pulgadas cúbicas.

Area lateral de un cono

Para hallar el área lateral de un cono, mira el modelo 18. Si hacemos rodar el cono sobre un plano, el área lateral se aplica sobre un sector de círculo como se muestra en la figura de ese modelo. (Observa que un sector de círculo está limitado por dos radios y una parte de la circunferencia.) Es decir, el modelo que tiene esta forma



se aplica sobre un sector de círculo como el siguiente:



El área lateral de un cono tiene la misma medida que el área de la región sombreada que tratamos de encontrar. Los dos puntos marcados con la letra Q en la figura provienen de un mismo punto del modelo. Se muestra el resto de la circunferencia en línea punteada para hacer más claro nuestro razonamiento. Sea s el número de unidades de longitud de la generatriz del cono y r el número de unidades del radio de su base.

Ahora, en un sector de círculo como el que tenemos arriba, el área es proporcional al arco. Por ejemplo, si el arco entre los dos puntos marcados con Q es un cuarto de la circunferencia, entonces la región sombreada es un cuarto del círculo. La longitud de la circunferencia es $2\pi s$; su área es πs^2. Si L representa el número de unidades cuadradas de la región sombreada, obtenemos la siguiente proporción:

$$\frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{L}{\pi s^2}$$

Si multiplicas ambos miembros de la ecuación por πs^2, ¿qué valor encuentras para L?

Este razonamiento justifica la siguiente conclusión:

<u>Propiedad 8.</u> <u>Si la longitud de la generatriz de un cono recto circular es s unidades y el radio de su base es r unidades, el número L de unidades cuadradas de su área lateral está dado por esta fórmula:</u>

$$L = \pi r s$$

Como ejemplo, tomemos nuevamente el cono de 24 pulgadas de alto y cuya base tiene un radio de 10 pulgadas. El cálculo de la longitud de la generatriz nos dio 26 pulgadas. En este problema tenemos, por consiguiente, $r = 10$, $s = 26$, de manera que

$$L = \pi(10)(26) = 260\pi \approx 816.4$$

y el área lateral es de unas 816.4 pulgadas cuadradas.

Ejercicios 11-7

1. Si T representa el número de unidades cuadradas del <u>área total</u> del cono (incluyendo la base), escribe una fórmula para

T en términos de r y s.

2. La generatriz de un cono tiene 12 pies de largo y el radio de su base tiene 3 pies. Determina sus áreas lateral y total en términos de π.
3. Un cono tiene 12 pies de alto y la longitud de su generatriz es 15 pies. Calcula el radio, las áreas lateral y total y el volumen.
4. El radio de la base de un cono tiene 15 pulgadas y su volumen $2,700\pi$ pulgadas cúbicas. Calcula las longitudes de su altura y de su generatriz, y el área lateral.
5. Sea c, el número de unidades de longitud de la circunferencia de la base de un cono recto circular. Muestra que el área lateral de este cono se calcula por la fórmula

$$L = \frac{1}{2}cs$$

en que s es la longitud de la generatriz.
6. Vuelve al problema 7, Ejercicios 11-5, y muestra que para una pirámide pentagonal regular, el área lateral está dada por

$$L = \frac{1}{2}ps$$

donde p es el número de unidades del perímetro de la base y s es la altura de cada cara.
7. Muestra por qué la fórmula del problema 6 es válida para toda pirámide regular.
8. Busca una relación entre las fórmulas de los problemas 5 y 6.
9. Supón que en el diagrama del modelo 18, el ángulo es $216°$ en lugar de $83°30'$, y la generatriz es 5 pulgadas en lugar de $4\frac{1}{8}$ pulgadas. Calcula el área lateral del cono. Calcula su volumen.
10. Construye los modelos 19a, 19b y 19c. En realidad, 19a y 19b son idénticos con excepción de las letras, y pueden recortarse al mismo tiempo. Asegúrate de que las letras estén bien puestas, pues necesitamos identificar los distintos vértices. Observa que, aunque las letras no se refieren a ángulos particulares, definen un vértice particular

después de armar el modelo.

11-8. Disección de un prisma

De acuerdo con nuestros experimentos con pirámides, el volumen de una pirámide es un tercio del volumen de un prisma que tiene la misma altura de la pirámide y cuya base es congruente con la base de la pirámide. Es natural preguntar si podemos ver esto mismo reuniendo tres pirámides idénticas para reconstruir el prisma. Por desgracia, una breve experiencia parece mostrarnos que esto no es posible. Sin embargo, podemos conseguir una especie de sustituto, como veremos.

Examina los modelos 19a, 19b y 19c. Todos ellos son tetraedros, o prismas triangulares. Primero compara los modelos 19a y 19b. ¿Qué relación hay entre la cara (ABC) del modelo 19a y la cara (SRQ) del modelo 19b? ¿Qué relación hay entre sus alturas si consideramos esas caras como bases? (En realidad, estas preguntas son un poco inútiles, puesto que ya sabemos que los moldes son idénticos para los dos modelos, de manera que sus medidas deben coincidir.) En todo caso los dos tetraedros (ABCQ) y (QRSC) (modelos 19a y 19b) tienen sus interiores con igual volumen.

Ahora compara los modelos 19a y 19c. Definitivamente hallamos que estos modelos no se parecen. Sin embargo, compara la cara (ABQ) del modelo 19a con la cara (BCR) de 19c. ¿Encuentras que son congruentes? Coloca los modelos sobre el escritorio con esas caras en contacto con el tablero. Observa que en estas posiciones puedes aproximar los modelos de manera que las dos caras marcadas (BCQ) coincidan. ¿Qué puedes decir de las alturas de estos dos modelos cuando se colocan en esta posición? Los modelos 19a y 19c, cuando se miran de esta manera, son pirámides triangulares con bases congruentes y alturas también congruentes. ¿Qué puedes decir sobre sus volúmenes? ¿Qué propiedad estás usando?

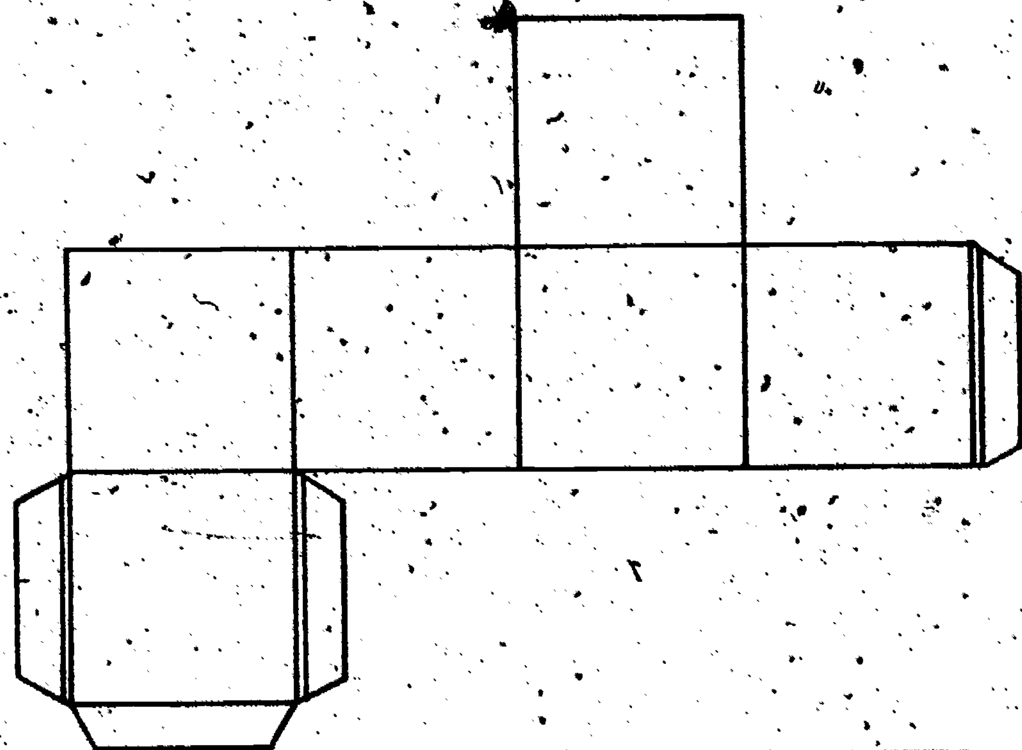
Deberías concluir que los tres modelos 19a, 19b y 19c tienen iguales volúmenes. Ahora junta los tres modelos de manera que las caras (BCQ) de los modelos 19a y 19c coincidan, y que

las caras (QRC) de los modelos 19b y 19c también coincidan. ¿Cuál es la figura resultante? ¿Es un prisma triangular?

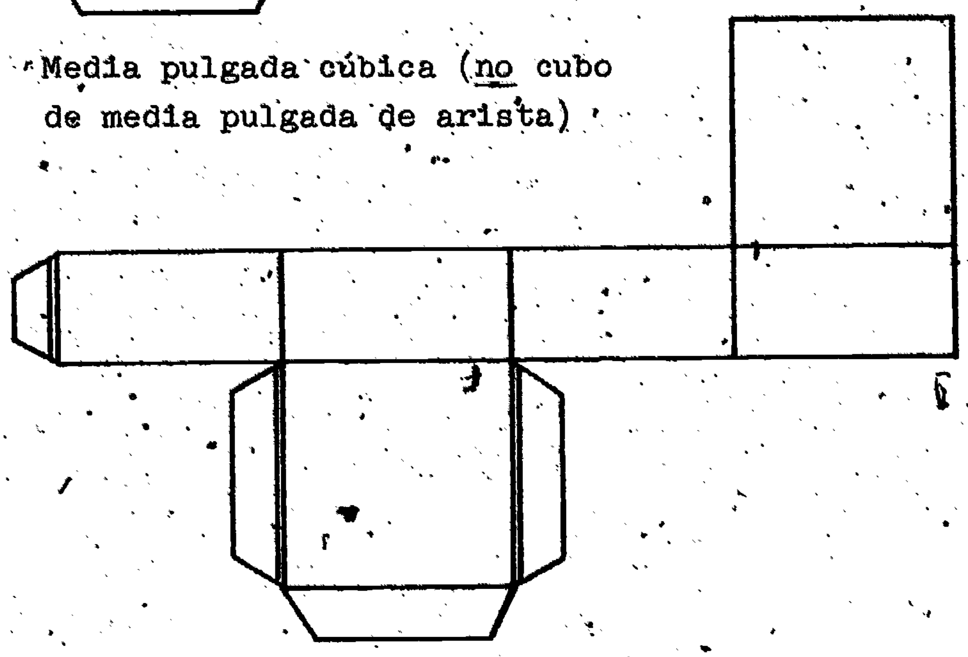
Entonces estos tres modelos de volúmenes iguales pueden reunirse para formar un prisma cuya base es la misma que la cara (ABC) del modelo 19a, y cuya altura es la misma que la de 19a. Esto confirma el resultado enunciado en la propiedad 6. En realidad, esta materia ha sido tratada en el Capítulo 10, pero ahora estamos particularmente interesados en los volúmenes de las piezas.

Si imaginamos que el modelo 19a ha sido dado originalmente, podemos pensar que los modelos 19b y 19c son dos tetraedros más, construidos de manera que tengan el mismo volumen que 19a, y que puedan ser combinados con 19a para construir un prisma de la misma base y altura. En este caso particular la base de 19a es un triángulo equilátero, y una de las aristas laterales es perpendicular al plano de la base. ¿Se hubiera podido también hacer esto si (ABCQ) fuera un prisma triangular <u>cualquiera</u>? La respuesta es sí.

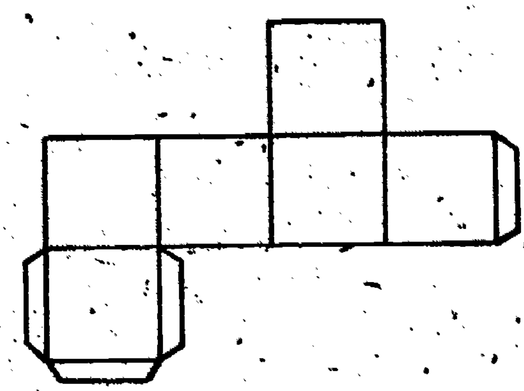
Modèlo 1. Cubo de una pulgada de arista



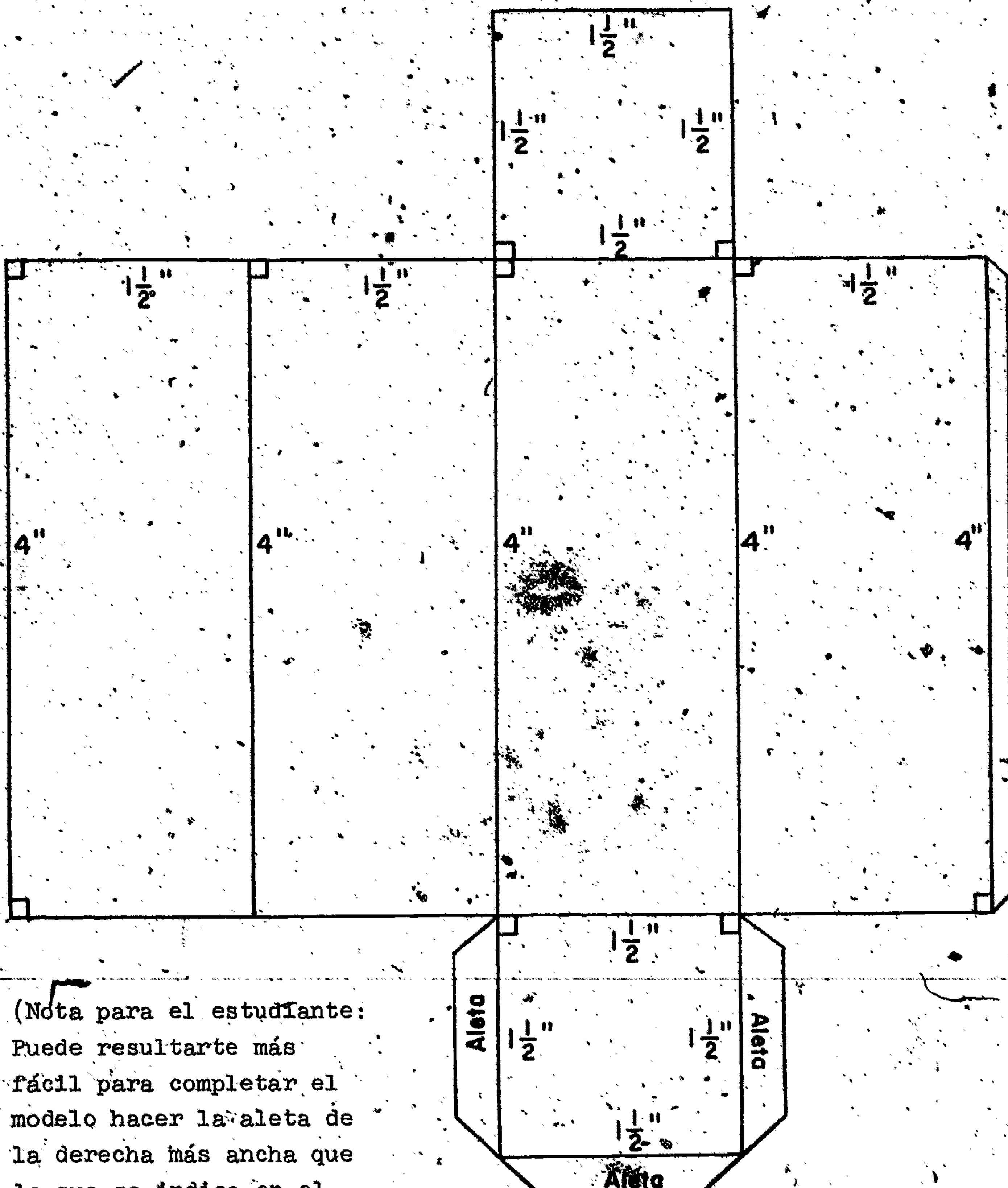
Modelo 2. Media pulgada cúbica (no cubo de media pulgada de arista)



Modelo 3. Cubo de media pulgada de arista

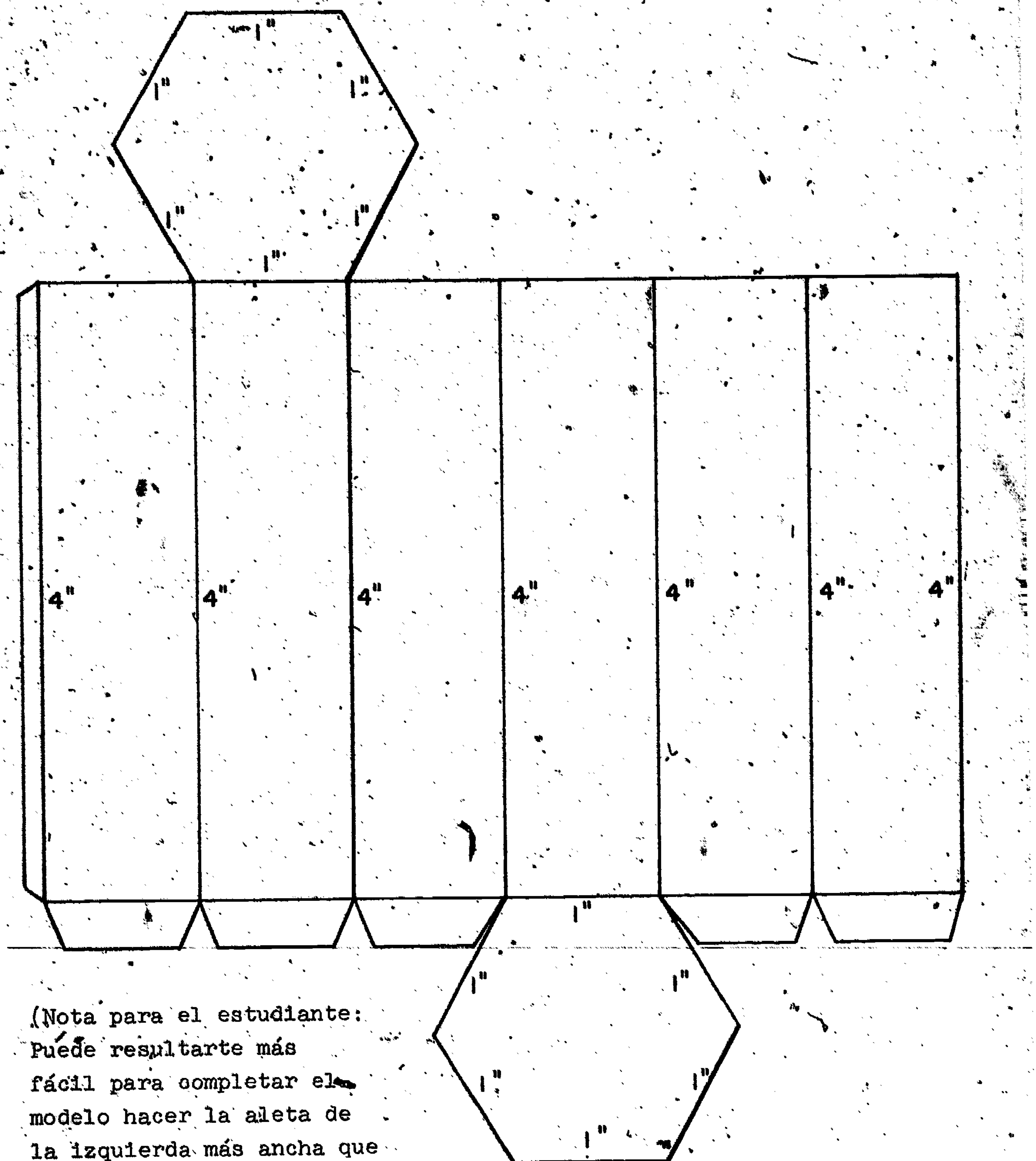


Modelo 4. Prisma recto rectangular



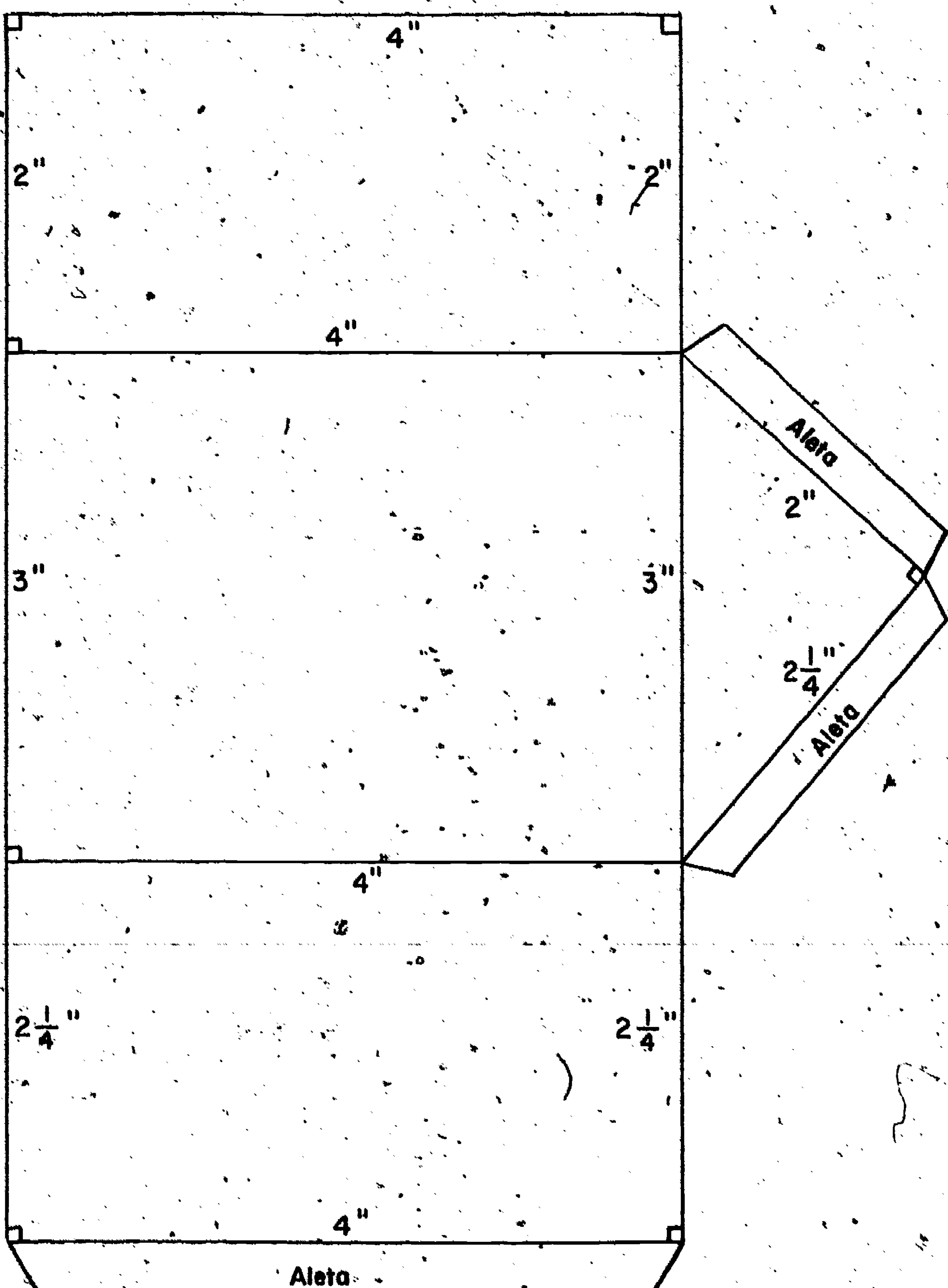
(Nota para el estudiante: Puede resultarte más fácil para completar el modelo hacer la aleta de la derecha más ancha que la que se indica en el dibujo.)

Modelo 5. Prisma recto hexagonal

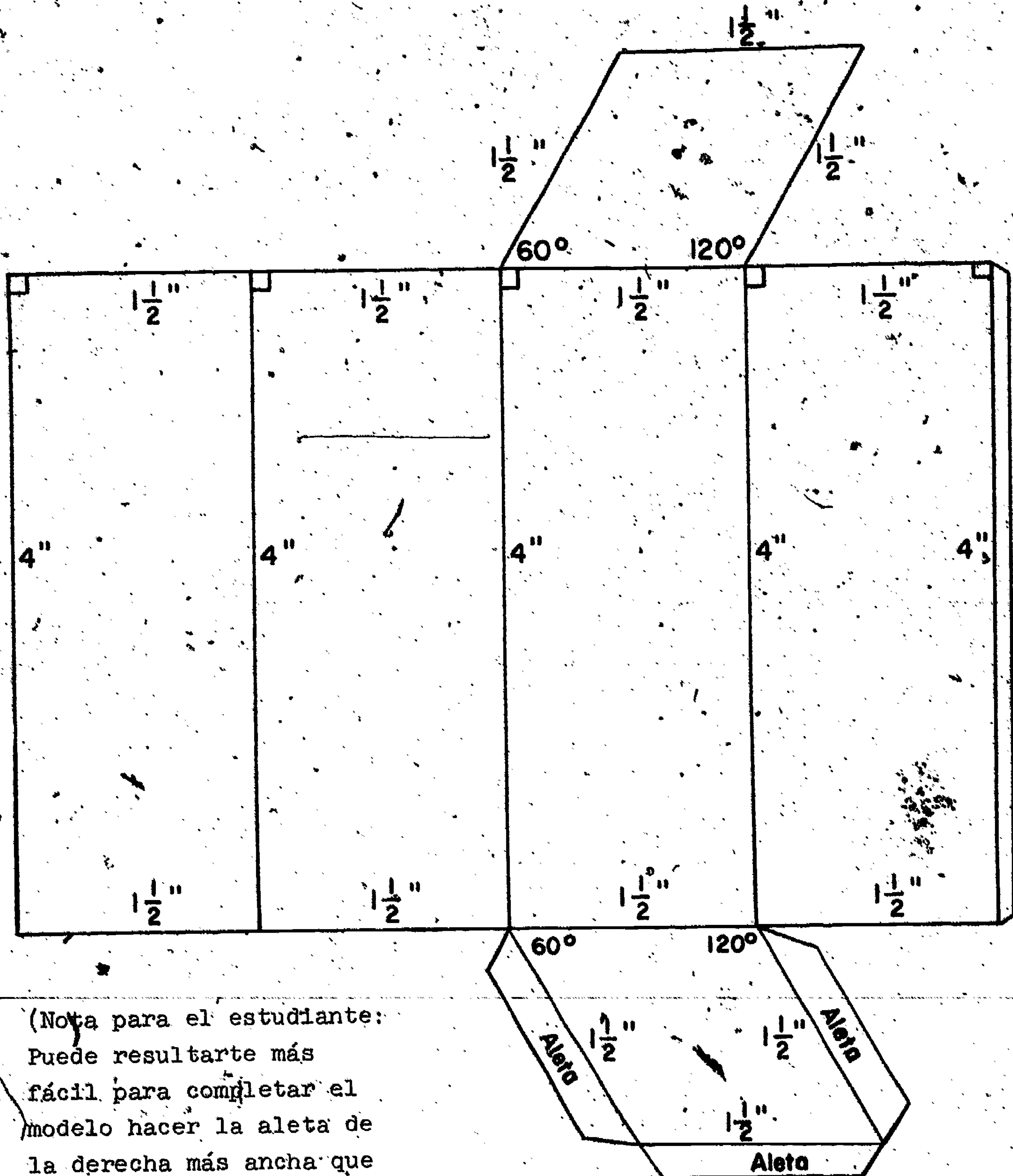


(Nota para el estudiante: Puede resultarte más fácil para completar el modelo hacer la aleta de la izquierda más ancha que la que se indica en el dibujo.)

Modelo 6. Prisma recto triangular. (Haz una copia adicional para el triángulo de la base superior. Ponle solamente una aleta de manera que se pueda abrir dicha base.)



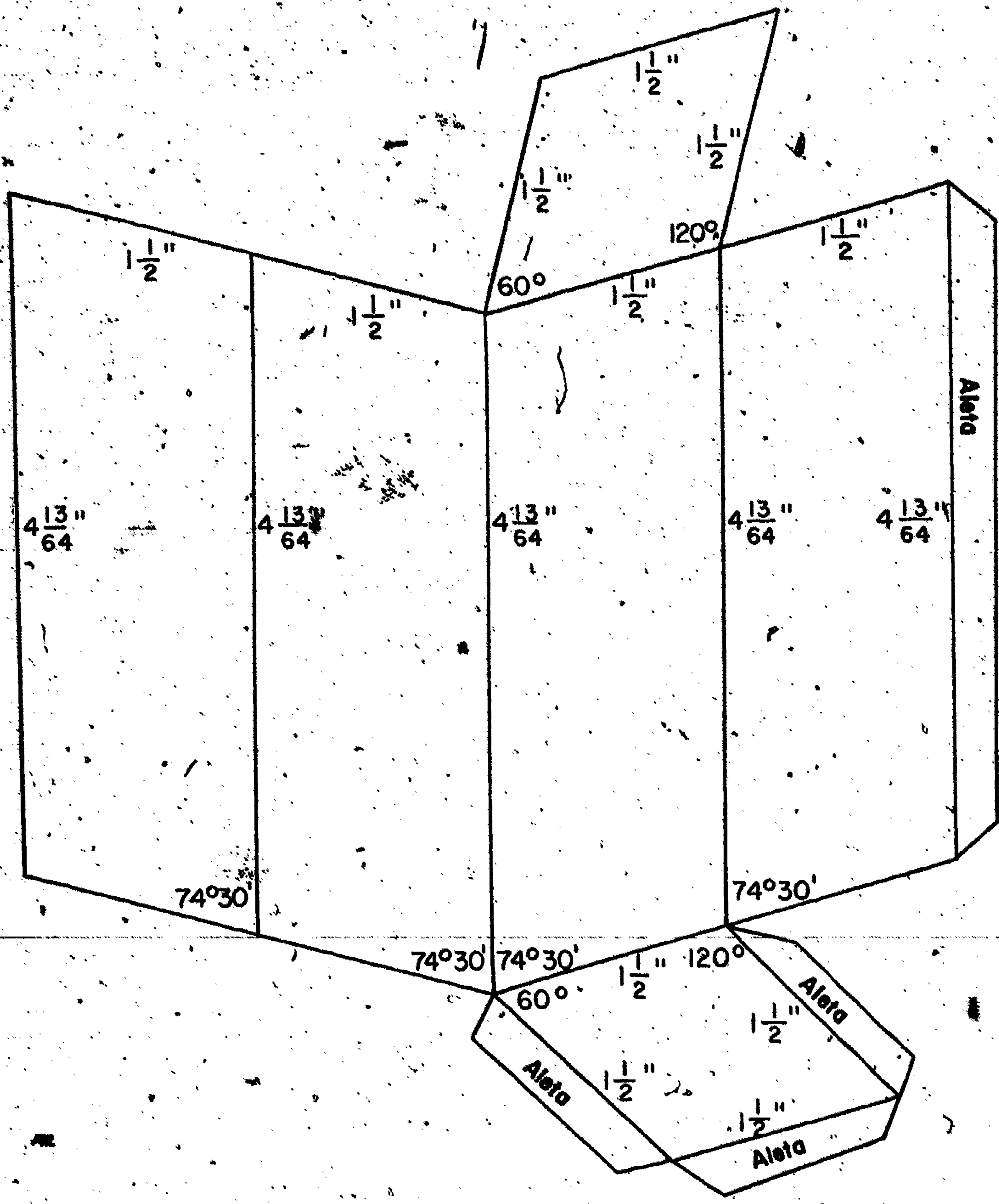
Modelo 7. Prisma recto con base romboidal (también, paralelepípedo)



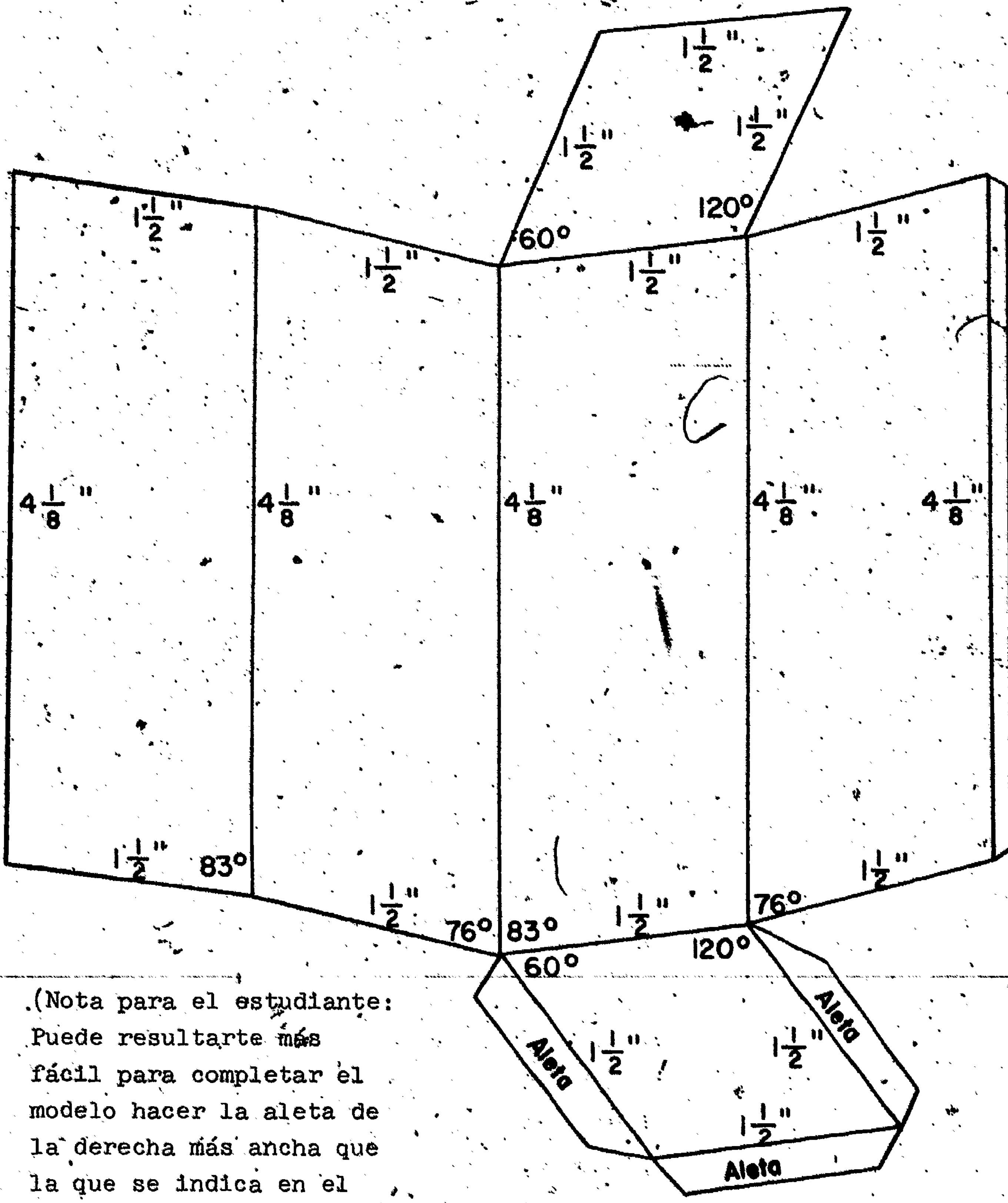
(Nota para el estudiante: Puede resultarte más fácil para completar el modelo hacer la aleta de la derecha más ancha que la que se indica en el dibujo.)

Modelo 8. Cilindro recto circular. (Dibuja la base circular con tu propio compás, usando el radio que se indica en la figura. Haz una copia adicional del círculo, pues hay dos bases. Pega la base inferior firmemente (con cinta engomada), pero sujeta la base superior solamente en un punto a fin de que se pueda abrir fácilmente.)

Modelo 9. Prisma oblicuo con base romboidal (también, paralelepípedo)

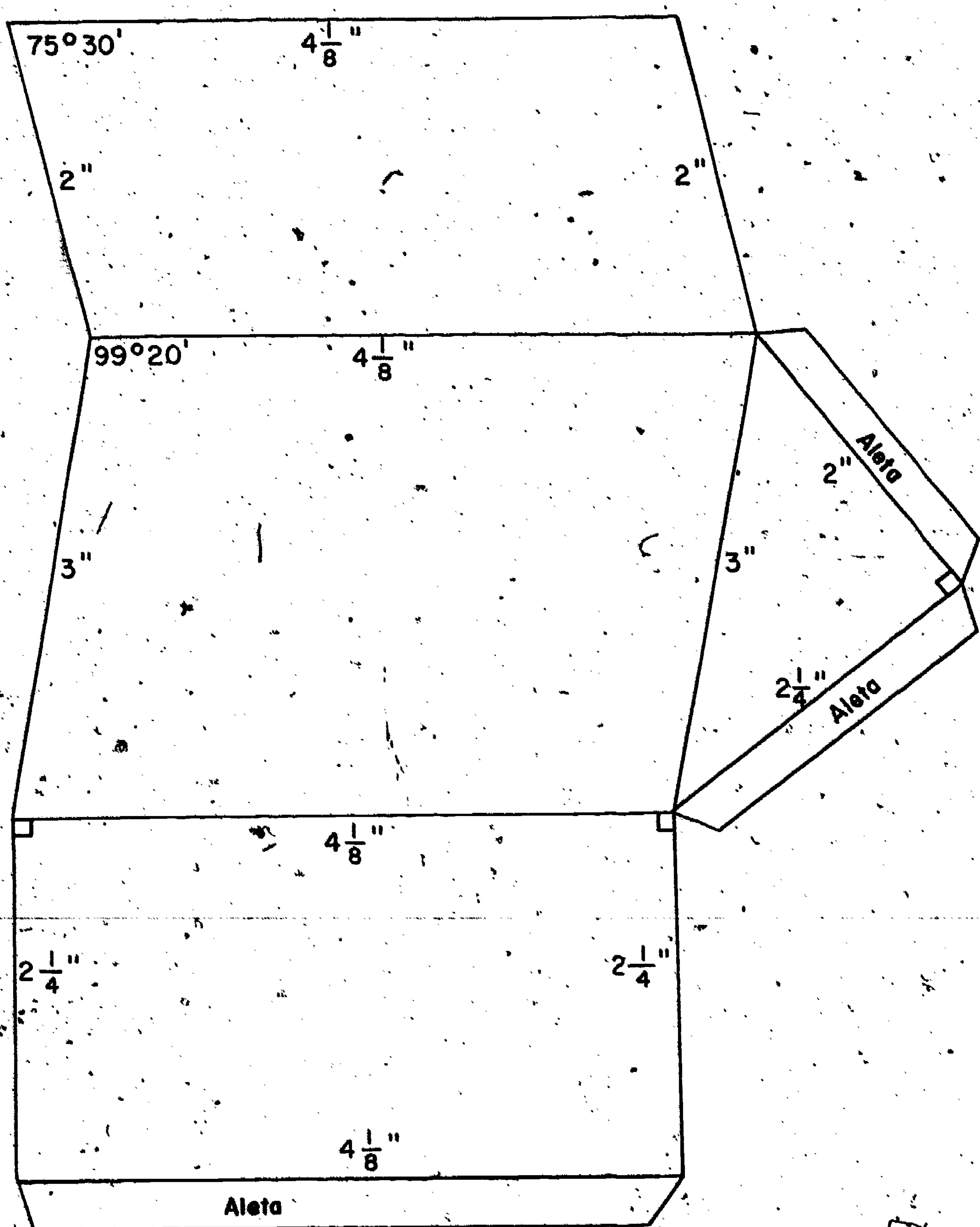


Modelo 10. Prisma oblicuo con base romboidal (también, paralelepípedo)

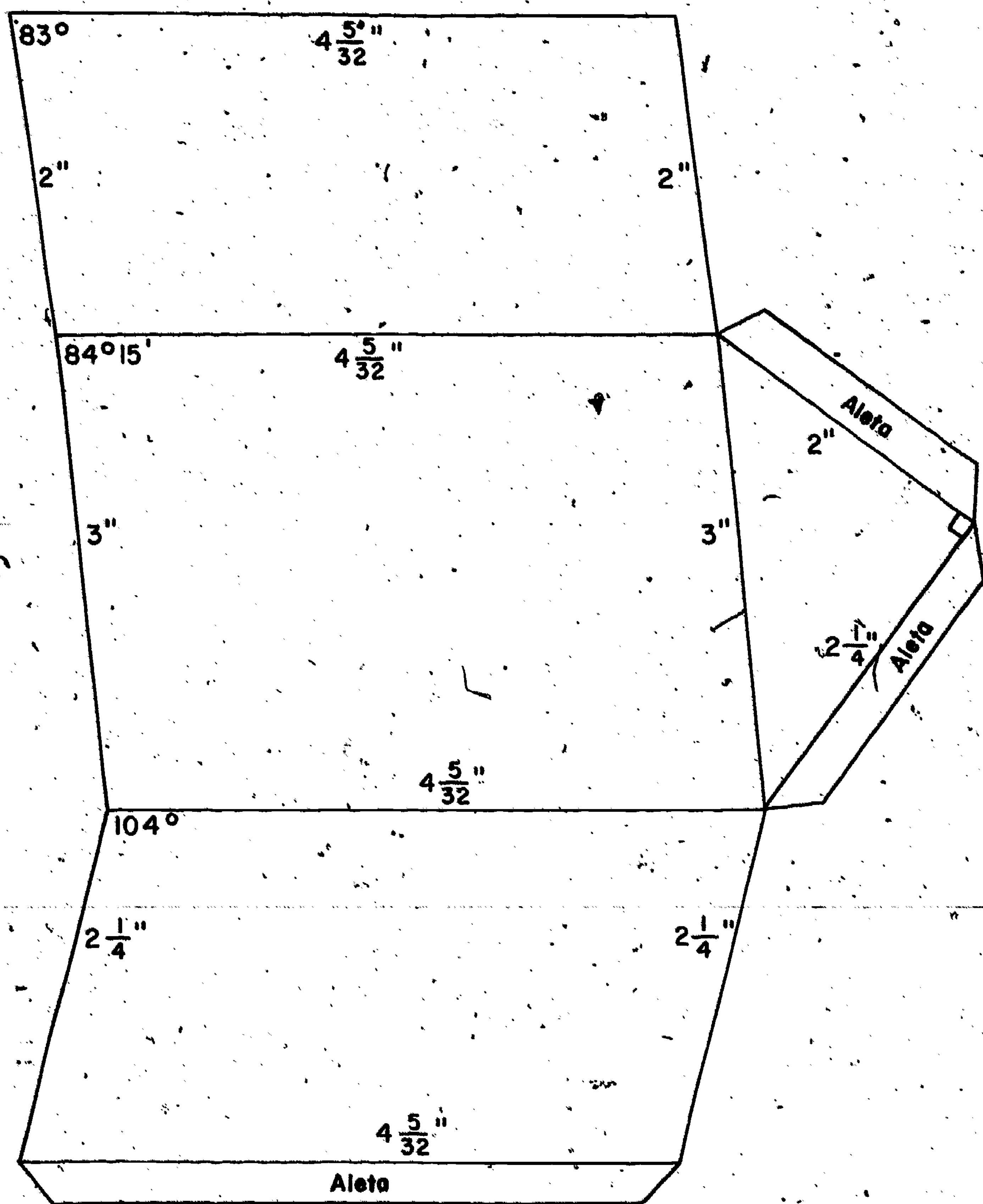


(Nota para el estudiante: Puede resultarte más fácil para completar el modelo hacer la aleta de la derecha más ancha que la que se indica en el dibujo.)

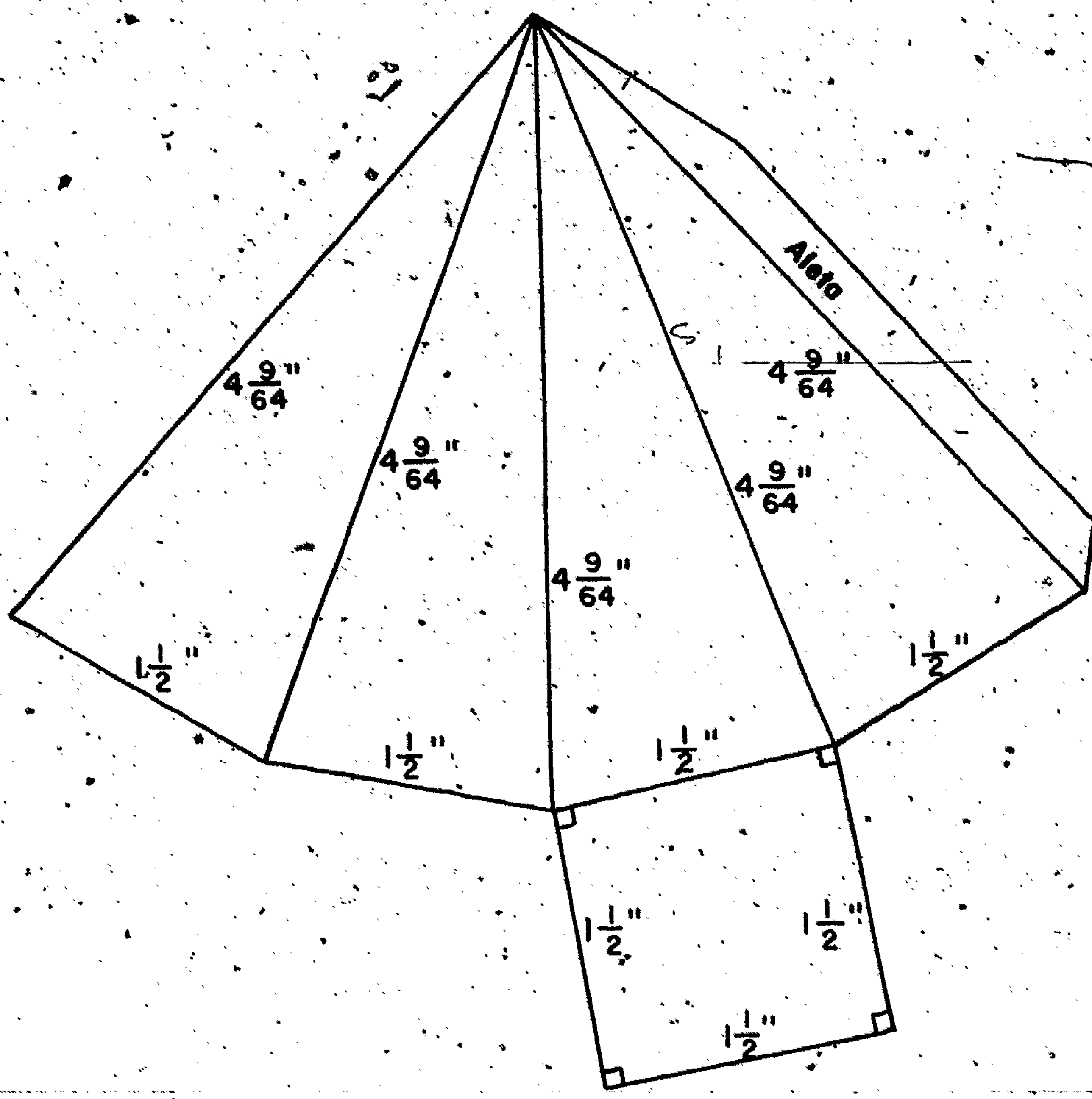
Modelo 11. Prisma oblicuo triangular. (Haz una copia adicional del triángulo para la otra base. Usa solamente una aleta para soldarla, a fin de que se pueda abrir.)



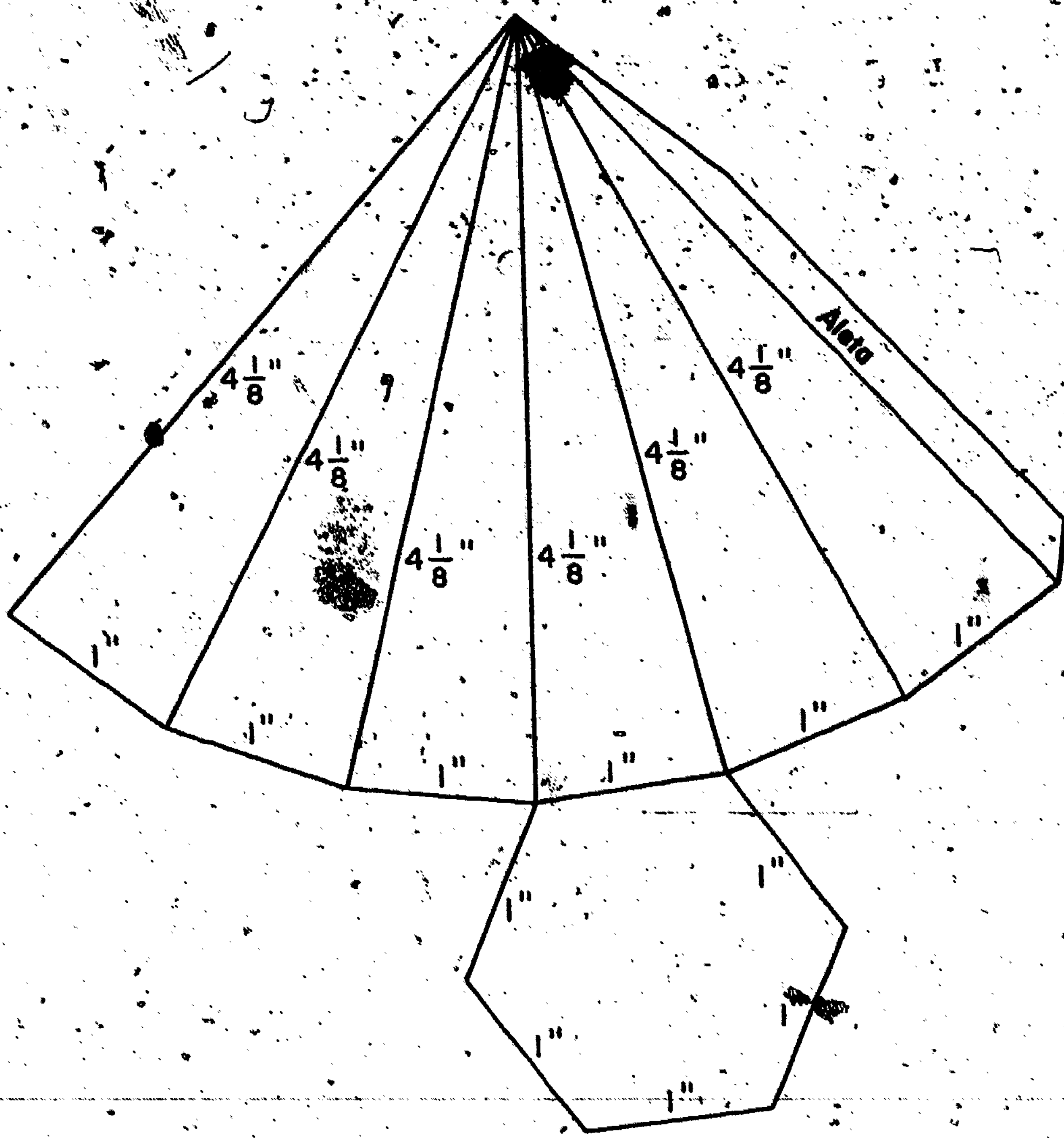
Modelo 12. Prisma oblicuo triangular. (Haz una copia adicional del triángulo para usarla en la otra base. Pégala mediante una sola aleta, a fin de que se pueda abrir.)



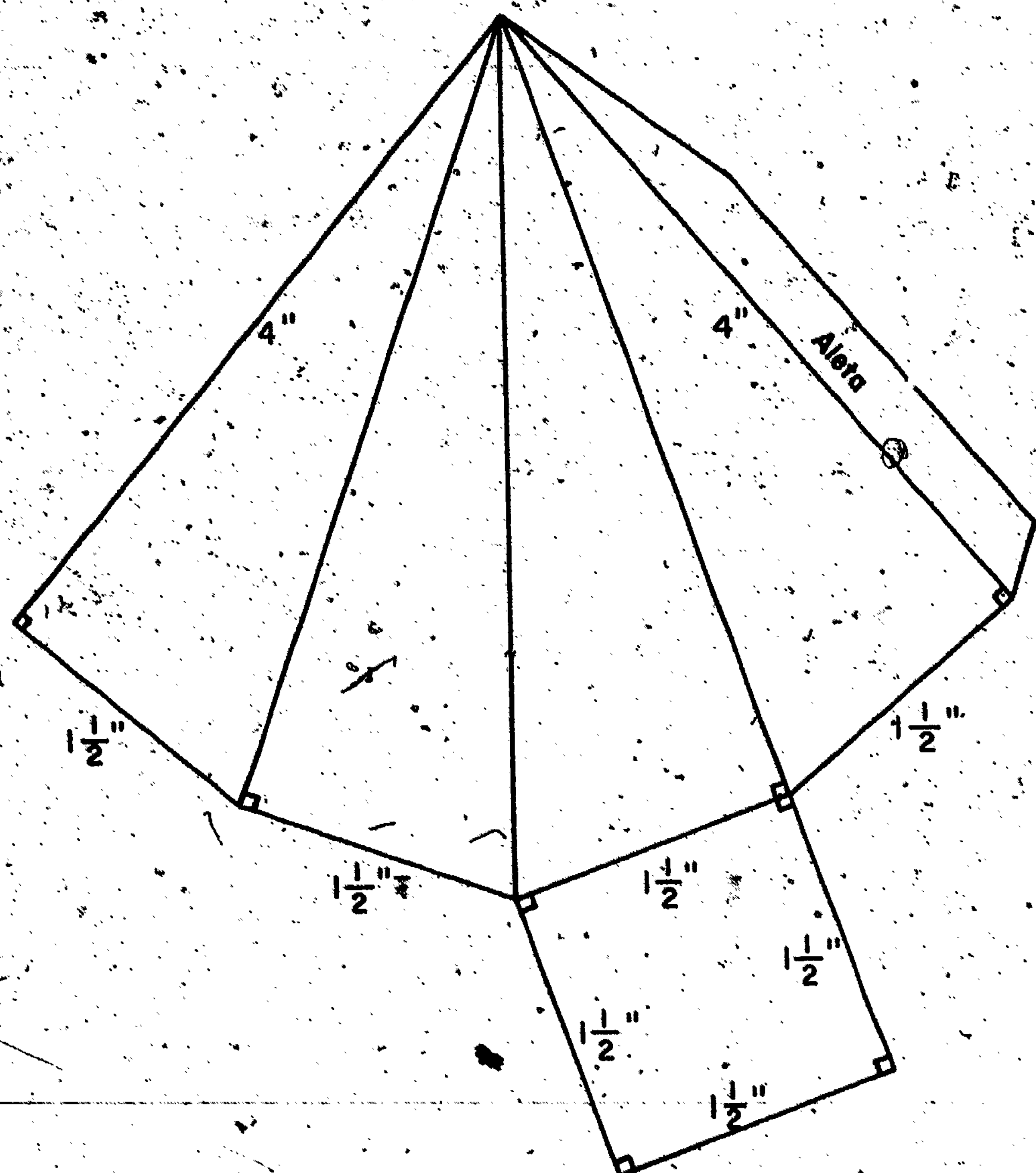
Modelo 13. Pirámide cuadrangular regular



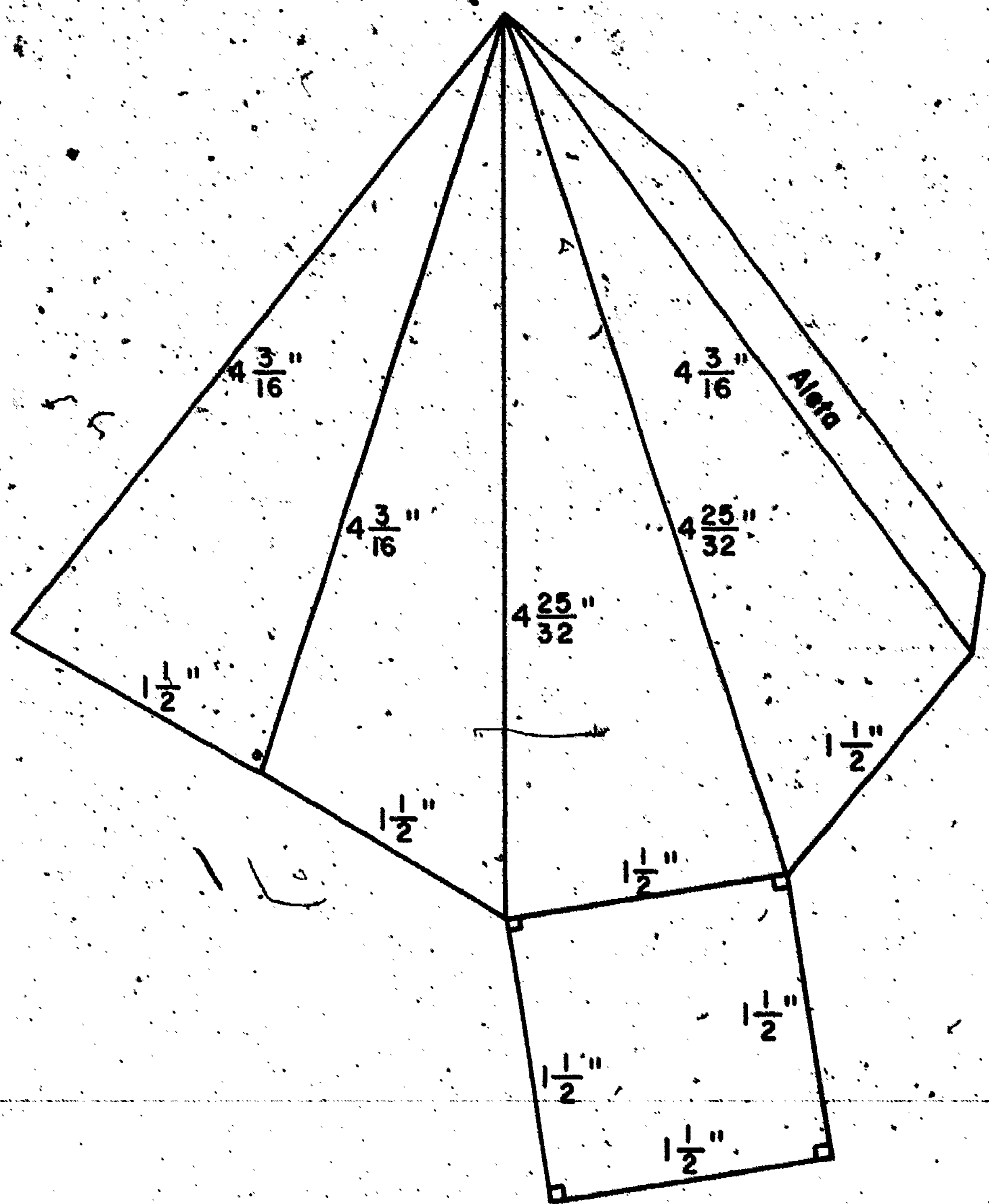
<u>Modelo 14.</u> Pirámide hexagonal regular



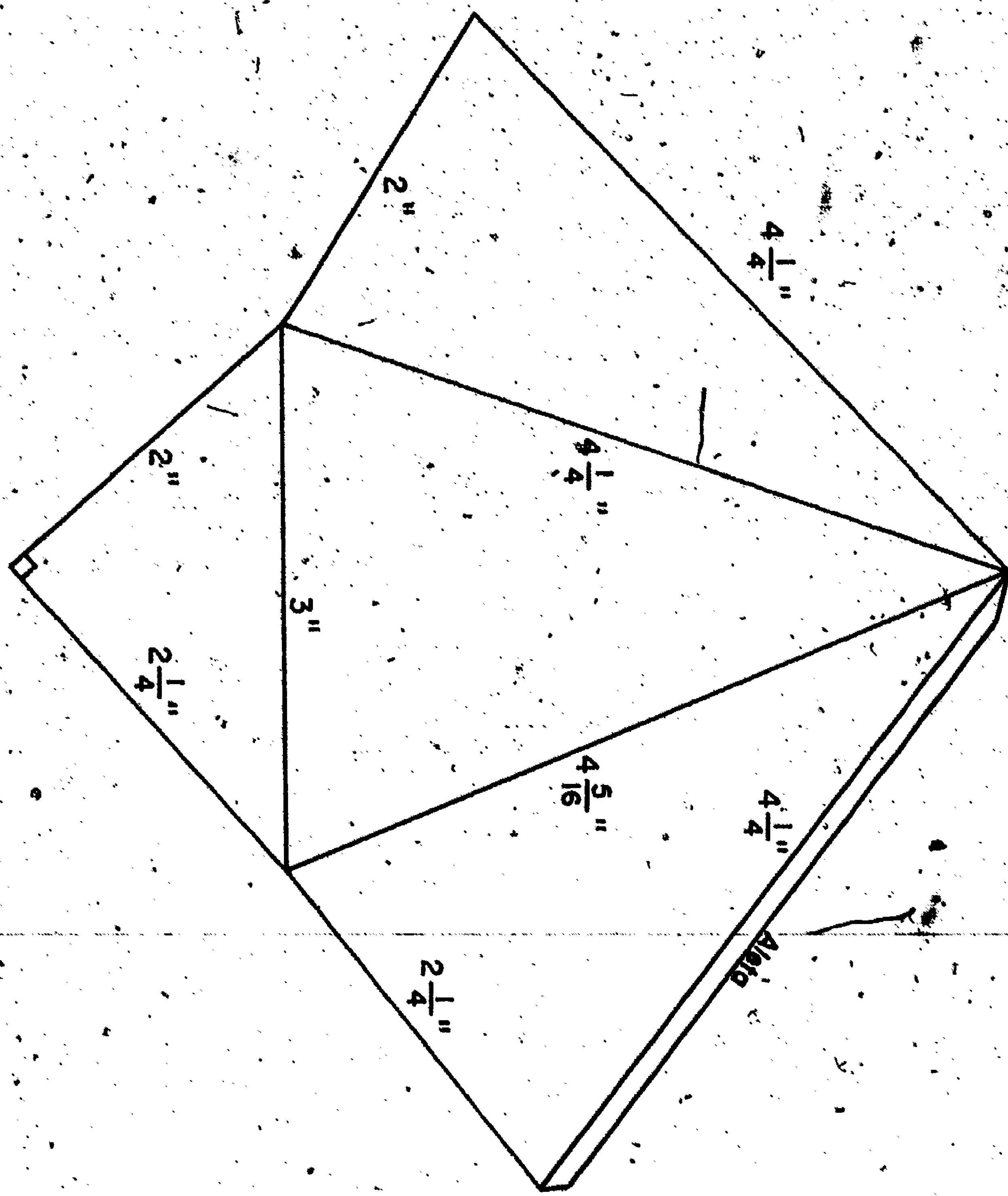
Modelo 15. Pirámide cuadrangular



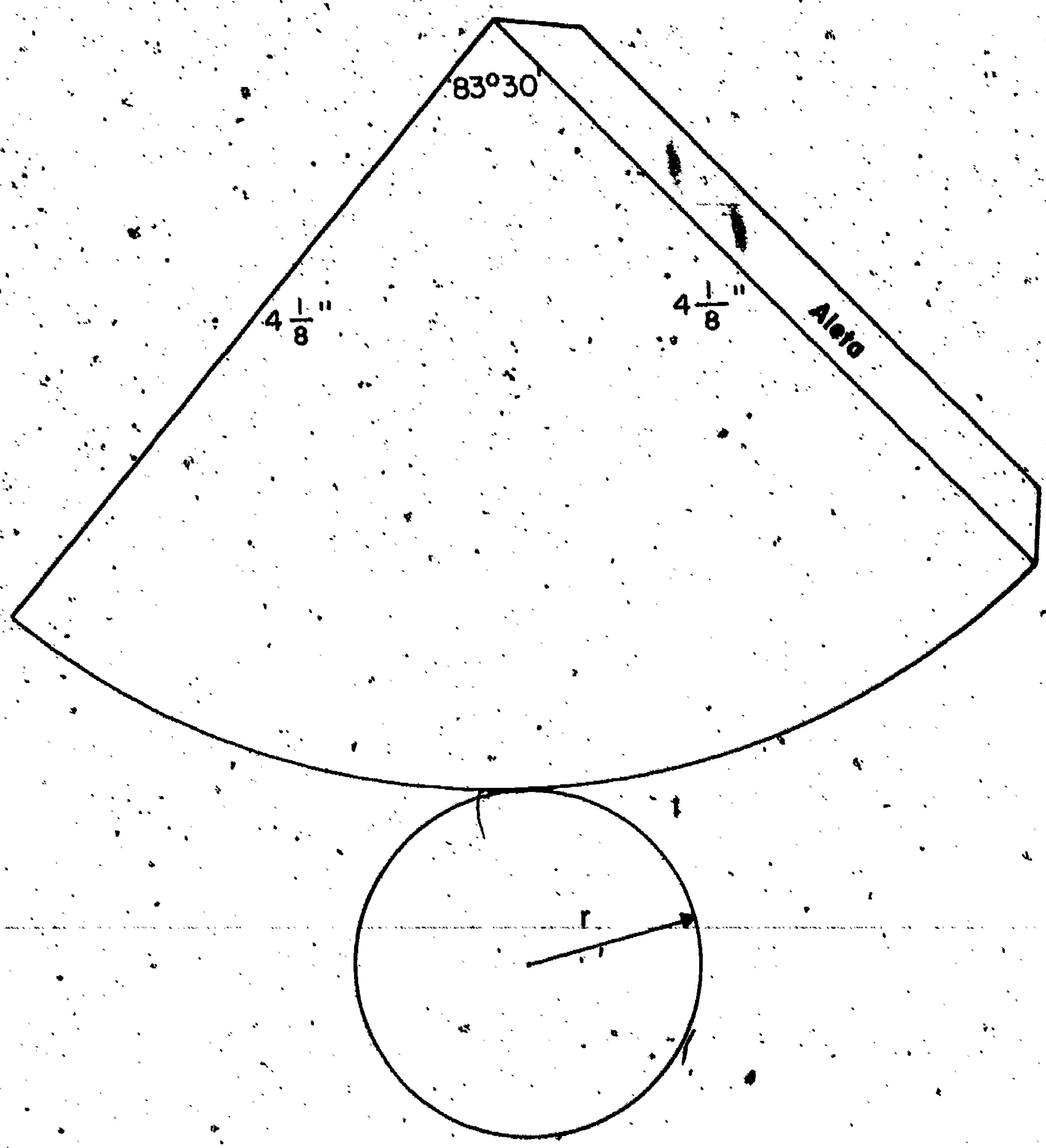
Modelo 16. Pirámide cuadrangular



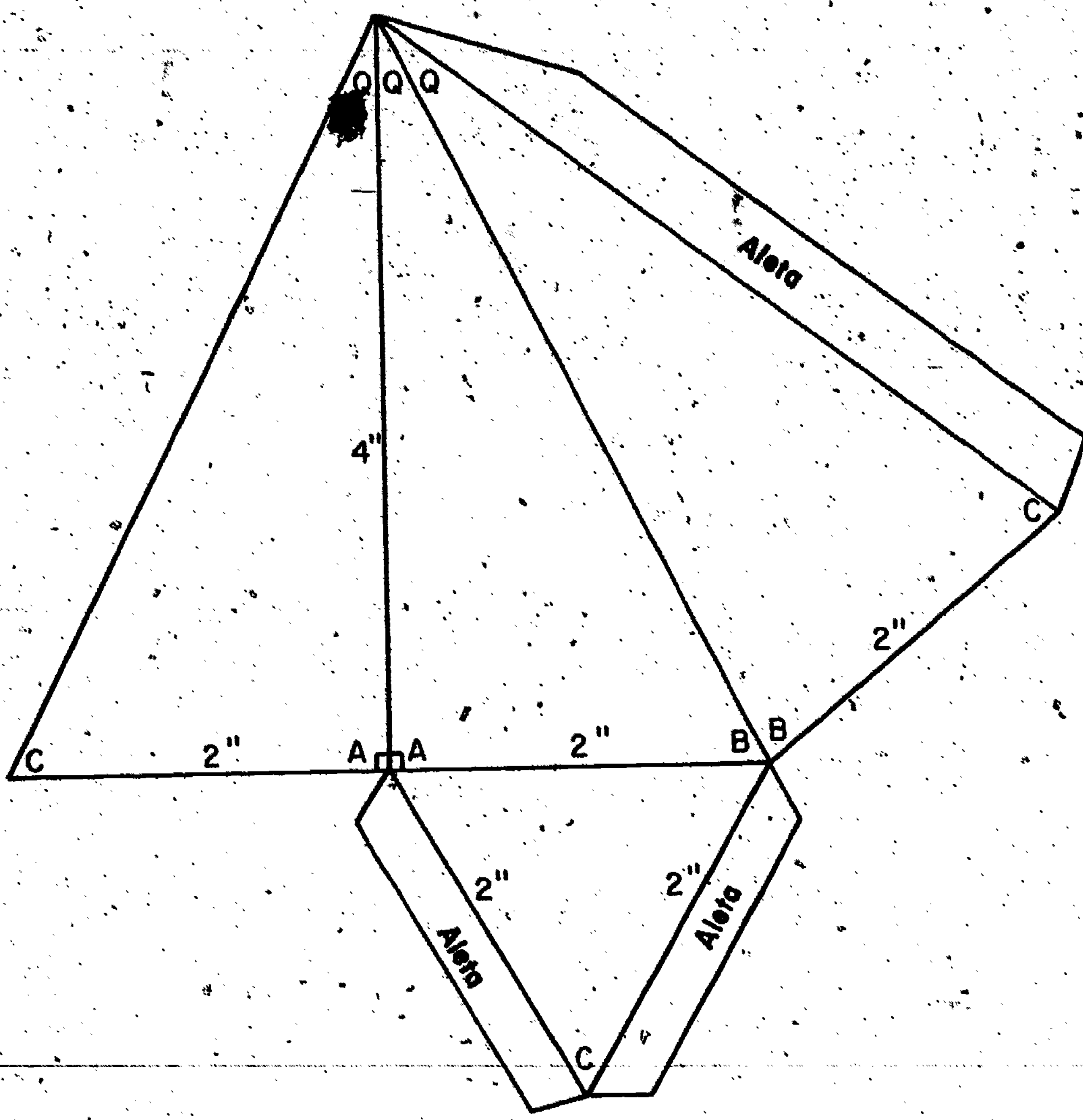
Modelo 17. Pirámide triangular (tetraedro)



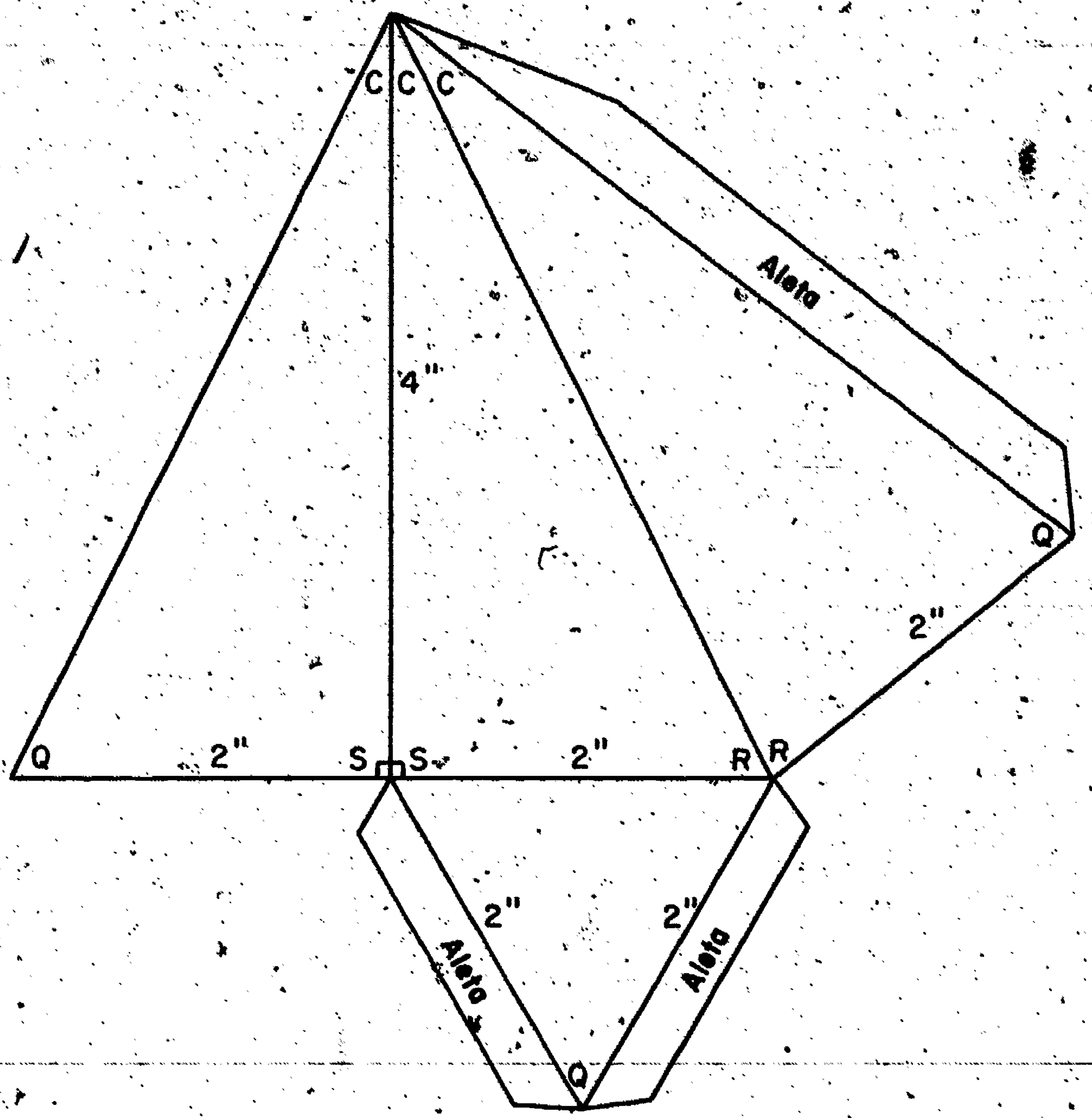
Modelo 18. Cono recto circular. (Dibuja la circunferencia y el arco con tu propio compás usando los radios indicados. Se supone que el radio de la circunferencia pequeña es el mismo que en el modelo 8.)



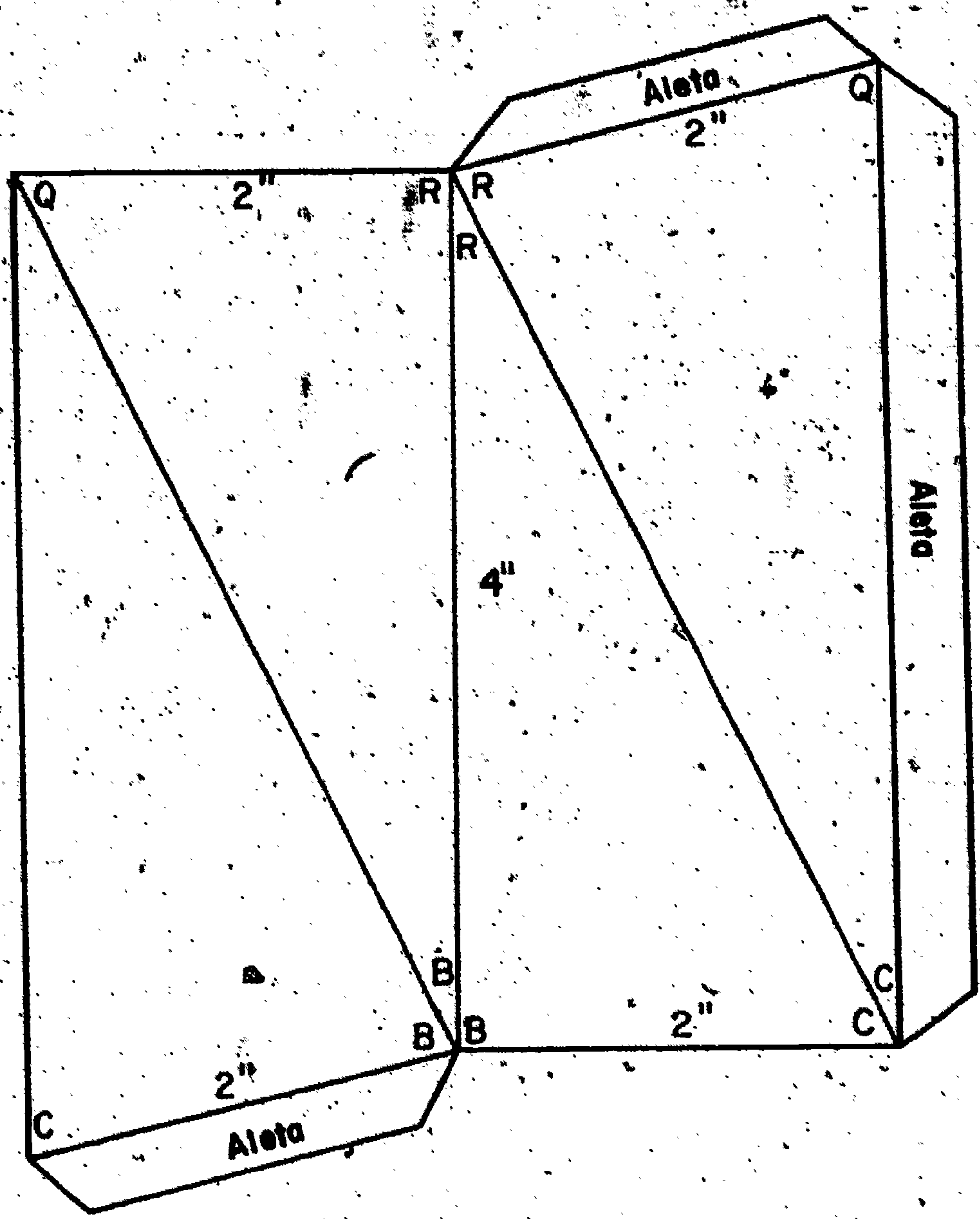
Modelo 19a



Modelo 19b



Modelo 19c



Los segmentos restantes cuya longitud no se ha indicado son de las mismas longitudes que los segmentos de los modelos 19a y 19b que unen los mismos puntos. Es decir, el segmento $\overline{BQ}$ de esta figura tiene la misma longitud que el segmento $\overline{BQ}$ del modelo 19a.

Resumen de las propiedades dadas en el Capítulo 11

Propiedad 1. Si una recta es perpendicular a dos rectas diferentes que se intersecan determinando un plano, es perpendicular al plano.

Propiedad 2. El segmento más corto desde un punto Q que se halla fuera de un plano r al plano r, es el segmento perpendicular a ese plano.

Propiedad 3. Si dos planos son paralelos, las distancias perpendiculares de diferentes puntos de un plano al otro plano son iguales.

Propiedad 4. Si dos prismas tienen bases congruentes y alturas iguales, tienen volúmenes iguales.

Propiedad 5. Si dos pirámides tienen bases congruentes y alturas congruentes, tienen iguales volúmenes.

Propiedad 6. El volumen de una pirámide es un tercio del volumen de un prisma cuya base es congruente con la base de la pirámide y cuya altura es igual a la altura de la pirámide. ($V = \frac{1}{3}Bh$, donde B representa el número de unidades cuadradas de área de la base y h el número de unidades de longitud de la altura.)

Propiedad 7. El volumen del interior de un cono es un tercio del volumen de un cilindro que tiene la misma altura y cuya base tiene el mismo radio. ($V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ó $V = \frac{1}{3}Bh$)

Propiedad 8. Si la longitud de la generatriz de un cono recto circular es s unidades y el radio de su base es r unidades, el número L de unidades cuadradas de su área lateral está dado por esta fórmula:

$$L = \pi rs$$

Capítulo 12

LA ESFERA

12-1. Introducción

Si se nos pide describir la forma de una moneda, podríamos decir que es "redonda". Pero esta descripción es vaga. Para describir la forma más exactamente, deberíamos decir que es "circular". Esta descripción es más exacta porque ya has aprendido una definición precisa de circunferencia:

Una circunferencia es un conjunto de puntos de un plano tales que todos los puntos del conjunto están a la misma distancia de un punto particular P, llamado centro.

Recuerda cómo se utiliza un compás para dibujar una circunferencia de centro y radio dados. La punta del compás se coloca en el centro. El compás mantiene la punta que contiene el lápiz a una distancia constante (el radio) del centro, a medida que trazas la circunferencia. Llamamos "circunferencia" al dibujo, pero el dibujo solamente representa la circunferencia, así como el dibujo de un segmento de recta representa el segmento de recta.

Cuando hablamos de circunferencias, nos referimos a puntos en un plano. Supón que consideramos todos los puntos en el espacio. ¿Qué subconjunto de puntos sugiere la siguiente descripción: "Un conjunto de puntos del espacio, tal que cada punto del conjunto está a la misma distancia de un punto particular"? Este conjunto de puntos sería más que una circunferencia. Tendríamos una superficie, como la de una bola. Llamaremos superficie esférica a tal superficie. El punto particular a partir del cual se miden las distancias se llama centro de la superficie esférica. Alguien podría decir que esta superficie es "perfectamente redonda", pero sería más preciso llamarla "superficie esférica".

La superficie de la tierra es una representación bastante buena de una superficie esférica. Pero no es exactamente esférica debido a las montañas y los valles. Además, la tierra está algo aplanada en los polos. (La longitud del Ecuador es 24,902 millas y la de una circunferencia máxima que pasa por los polos es

24,860 millas. ¡Como casi todos los objetos de la naturaleza, es un poco más grande en el medio!) La superficie de una pelota de baloncesto es una representación mejor de la superficie esférica. La superficie de algunos adornos del árbol de Navidad o la superficie de un perdigón, son aún mejores representaciones de la superficie esférica, puesto que son lisas.

Muchos objetos son esféricos; es decir, tienen la forma de la superficie esférica. Algunos de esos objetos, tales como las pelotas de goma, se usan como juguetes. Otros se usan en la industria, etc. A causa de esos diversos objetos esféricos y, principalmente, debido a la superficie prácticamente esférica de la tierra, es importante que conozcamos algunas de las propiedades de esta figura.

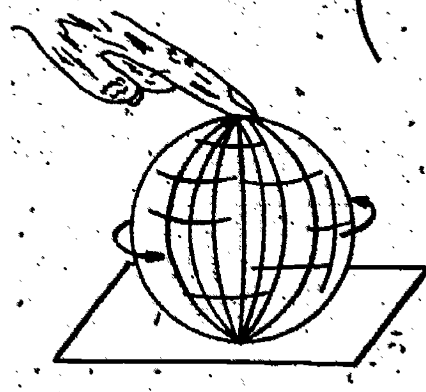
Una representación muy interesante de superficie esférica es una pompa de jabón. ¿Te has maravillado alguna vez de que una pompa de jabón tenga forma esférica? Hay una razón física muy precisa para esto. Oirás hablar de esta propiedad nuevamente al final de este capítulo.

Ejercicios 12-1

1. Haz una lista tan larga como puedas con los nombres de los juegos o deportes en los cuales aparezcan objetos esféricos, como una bola.
2. Haz una lista tan larga como puedas de los objetos esféricos que se usan como depósitos.
3. La pesca es un deporte popular y una industria importante. ¿Puedes imaginar algunos objetos esféricos que son muy útiles en ciertas clases de pesca?
4. Haz una lista de algunos objetos útiles en el hogar que tengan forma esférica.
5. Toma una moneda, como la de medio dólar, y supón que no tiene espesor.

   (a) ¿Qué figura geométrica sugiere el borde de la moneda?

(b) Supón que sostenemos verticalmente la moneda con un dedo, como se muestra en la figura de la derecha. Cuando se da un golpe brusco a uno de sus bordes, la moneda gira rápidamente. ¿Qué idea geométrica representa el borde de la moneda mientras gira?



(c) ¿Tiene espesor la idea geométrica representada por el borde durante el giro?

6. En el estudio de la geometría del plano nos hemos referido a los objetos como si tuvieran sólo dos dimensiones. Indica un objeto que tiene tres dimensiones.

7. Consulta tu libro para repasar la definición de circunferencia. Escribe una definición de superficie esférica.

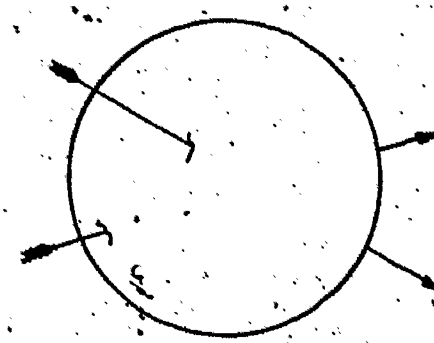
8. (a) Supón que todos los puntos de una superficie esférica están a la distancia v del centro C de la esfera. ¿Cómo puedes describir el conjunto de todos los puntos que están situados a distancias menores que v del punto C?

   (b) ¿Cómo puedes describir el conjunto de puntos que se hallan a distancias mayores que v del punto C?

El conjunto descrito en el problema 8(a) se llama el <u>interior de la superficie esférica</u>. La reunión de la superficie esférica y de su interior se llama <u>esfera</u>. La esfera es, pues, un sólido.

12-2. Circunferencias máximas y circunferencias menores

Supón que tomamos una pelota para representar una superficie esférica, y que lanzamos flechas que atraviesan la superficie como se muestra en la figura de la derecha. ¿En cuántos puntos distintos puede atravesar cada flecha la superficie si la longitud de la flecha es mayor que el diámetro de la superficie esférica (líneas más adelante se da la definición de "diámetro")?



Cada flecha que atraviesa la pelota de parte a parte representa una recta que interseca a la superficie esférica. Imaginemos todas estas rectas que intersecan a una superficie esférica particular en dos puntos distintos. Algunas rectas pasarán por la parte superior de la esfera, otras por la parte inferior y algunas por ambas partes. Podemos imaginar un número infinito de tales rectas que pasan a través de la esfera, intersecando a su superficie en dos puntos distintos.

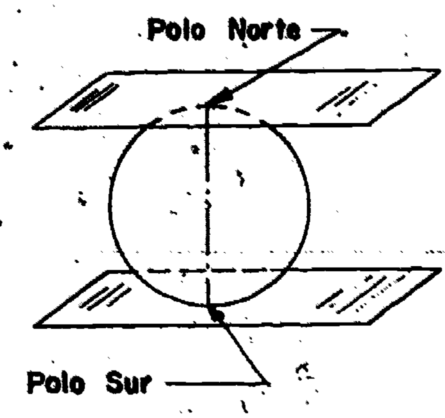
Cada una de estas rectas contiene un segmento de recta cuyos extremos están sobre la superficie esférica. Consideremos este conjunto de segmentos de recta. ¿Son todos los segmentos congruentes; es decir, tienen la misma longitud? No, pero hay un subconjunto de esos segmentos que <u>son</u> congruentes: los que pasan por el centro de la superficie esférica. Un segmento de recta cuyos extremos están en la superficie esférica y que pasa por el centro de la misma se llama <u>diámetro</u> de la superficie esférica o de la esfera. ¿Tendrá todo segmento de recta cuyos extremos están sobre la superficie esférica la misma longitud que un diámetro? ¿Ves por qué es necesario incluir la frase "que pase por el centro" en nuestro definición de diámetro?

La recta que pasa por los polos de la tierra se llama <u>eje</u> de la tierra. Esta es aproximadamente la recta alrededor de la cual gira la tierra. Si imaginamos la tierra como una esfera, el diámetro contenido en el eje interseca a la superficie esférica

en los Polos Norte y Sur. Imaginamos que esos dos puntos, representados por los polos, están "directamente opuestos" uno de otro. Como el prefijo "anti" significa opuesto, podríamos llamar a esos puntos "antipolares". Pero los polos no son los únicos puntos sobre la tierra que tienen esta propiedad, pues todo diámetro de la tierra contendrá dos de esos puntos. Entonces, usamos un nombre diferente. Los extremos de todo diámetro de una esfera se llaman puntos antipódicos o antípodas. Decimos entonces que cada extremo de un diámetro de una esfera es un antípoda del otro extremo. Entonces, el Polo Norte representa un punto que es un antípoda del punto representado por el Polo Sur. Todo punto sobre la superficie esférica tiene un antípoda. Para hallar el antípoda de cualquier punto P sobre una superficie esférica, une P con el centro C de la esfera. La recta que pasa por esos dos puntos intersecará a la superficie esférica en el antípoda del punto P.

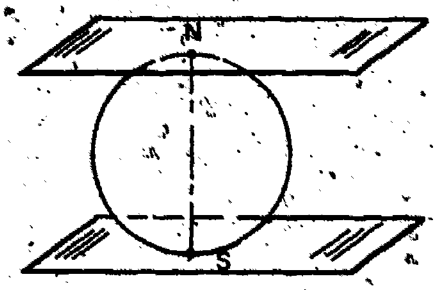
Como ejemplo de puntos antípodas, toma el punto sobre la superficie de la tierra en el que estás parado. El antípoda de este punto debe estar en el otro lado de la tierra. Podrías imaginar que se ha taladrado un agujero que pasa directamente por el centro de la tierra y que llega hasta el otro lado. ¿En qué sitio de la tierra saldría el agujero? Probablemente te resultará interesante localizar el antípoda del lugar en que vives. Para hacerlo, usa un globo que represente a la tierra.

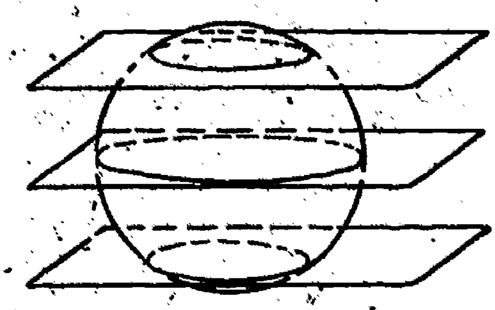
Ahora imagina la tierra como una esfera con eje vertical, como se muestra en la figura de la derecha. Considera los planos horizontales representados en esa figura. Un plano toca justamente la superficie esférica en el Polo Norte, y el otro la toca exactamente en el Polo Sur. Un plano que toca o interseca a la esfera en un punto se llama plano tangente a la esfera en ese punto. En cada punto de la superficie esférica



habrá un plano tangente a la esfera en ese punto.

Supón que hacemos descender el plano horizontal superior como se indica en la segunda figura de la derecha. ¿Intersecará el plano a la esfera exactamente en un punto? El conjunto intersección de la esfera y el plano será un círculo, como se muestra a la derecha. ¿Qué ocurre con la longitud de la circunferencia a medida que el plano desciende? El tamaño de las circunferencias crecerá hasta que alcancemos la posición "media" de la esfera. A la circunferencia correspondiente a la posición media le llamamos <u>Ecuador</u>. Si de esta posición seguimos bajando el plano, las circunferencias decrecen en longitud hasta que el conjunto intersección consiste nuevamente en un solo punto en el Polo Sur. Entonces, un plano que interseca a una esfera puede tener una intersección con la superficie esférica que es una circunferencia o que consiste en un solo punto. Por supuesto, es posible que el plano y la esfera no se intersequen. Entonces el conjunto intersección es vacío.





Supón que consideramos el conjunto de circunferencias de la superficie de la tierra que son intersecciones de la tierra con planos paralelos al que contiene el Ecuador. En este conjunto, el Ecuador tiene dos propiedades que no las tienen ninguna de las otras circunferencias. Primero, su longitud es mayor que las longitudes de las otras circunferencias. Segundo, su plano pasa por el centro de la esfera. Al Ecuador le llamamos <u>circunferencia máxima</u> y a las otras líneas paralelas a él, <u>circunferencias menores</u>.

Naturalmente, todo plano que pasa por el centro de la esfera

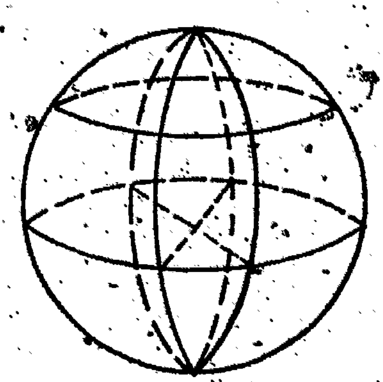
corta la superficie esférica en una circunferencia del mismo tamaño, máximo. Cualquiera de esas circunferencias es una circunferencia máxima.

Definición. Una circunferencia máxima sobre una superficie esférica es toda intersección de la superficie esférica con un plano que pasa por el centro de la esfera.

Definición. Todas las circunferencias de una superficie esférica que no son circunferencias máximas se llaman circunferencias menores.

Todas las circunferencias máximas sobre una superficie esférica tienen la misma longitud, pues sus radios son iguales al radio de la superficie esférica. La longitud de toda circunferencia máxima es mayor que la longitud de toda circunferencia menor sobre la superficie de la esfera.

Supón nuevamente que la tierra es una esfera. Podemos imaginar muchas circunferencias máximas sobre su superficie. Un conjunto particular de circunferencias máximas sobre la superficie de la tierra es el que consiste en todas las que pasan por los Polos Norte y Sur. Considera, en una de esas circunferencias, la semicircunferencia que va de un polo al otro. Esa semicircunferencia cuyos extremos son los polos se llama meridiano.



Las circunferencias menores cuyos planos son paralelos al plano del Ecuador se llaman paralelos de latitud, o simplemente paralelos. Todo paralelo tiene su centro sobre el eje de la tierra y su plano perpendicular a ese eje.

Sabes que cuando tienes el norte al frente, el este está a tu derecha, el oeste a tu izquierda y el sur a tu espalda. Sobre la superficie de la tierra, el este y el oeste del punto en que estás son direcciones a lo largo del paralelo que pasa por ese punto. Si quieres recalcar que la dirección es exactamente hacia el este,

dices a veces "dirección este".

Posteriormente estudiaremos con mayor detenimiento los meridianos y los paralelos de latitud. Veremos entonces la manera de localizar los puntos sobre la tierra por medio de esas circunferencias máximas y circunferencias menores.

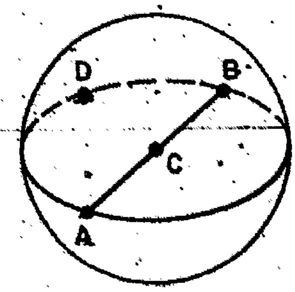
Ya sabes, que en un plano, la distancia más corta entre dos puntos es la que se mide a lo largo de una línea recta. Sobre la superficie esférica esto no es cierto, aunque podría parecerlo si imaginaras dos puntos muy próximos sobre la superficie de la tierra. ¿Puede un aeroplano que vuela de Nueva York a San Francisco viajar a lo largo de un camino que sea una línea recta? Naturalmente que no, pues debe seguir la curvatura de la tierra. En la superficie esférica, ocurre que la distancia más corta entre dos puntos es la longitud de un camino que sigue un arco de circunferencia máxima que pasa por esos dos puntos. (Probablemente has oído hablar de la "ruta de la circunferencia máxima" para los aeroplanos y barcos.) La demostración de este importantísimo hecho es demasiado difícil para darla en este libro. Sin embargo, aplicando una cuerda tensa sobre un globo podrás comprobar nuestra afirmación.

Ejercicios 12-2

Haz lo posible por comprobar cada pregunta de los problemas 1 a 6. Cuando se te pida explicar tu respuesta, da las razones que puedas, pero no imagines que se te pide demostrar que tus respuestas son correctas. Debes estar preparado, sin embargo, para justificar tus respuestas en la mayor parte de los casos. El propósito de estas preguntas es ayudarte a que comiences a pensar en las propiedades de las esferas. Hallarás que es de mucha ayuda hacer dibujos sobre una bola grande o en otro objeto esférico. Tales dibujos te ayudarán a "visualizar" las figuras de que hablamos.

1. (a) ¿Hay un antípoda para todo punto dado sobre una superficie esférica?
   (b) ¿Hay más de un antípoda para todo punto dado sobre una superficie esférica?

2. En la figura de la derecha, C es el centro de la esfera. A y B son puntos antipódicos. En la figura se muestra la circunferencia máxima que pasa por A y B. D es un punto sobre esta circunferencia máxima que pasa por A y B. La parte de la circunferencia máxima que no se ve desde el frente se muestra en líneas punteadas.



(a) Midiendo a lo largo de una recta, en el interior de la esfera, ¿qué distancia es mayor, AB o AC?

(b) Midiendo sobre la superficie de la esfera, ¿es la distancia de A a D más larga que la de A a B?

(c) ¿Hay algún punto sobre esta circunferencia máxima cuya distancia a A sea mayor que la distancia de B a A, si esas dos distancias se miden, bien a lo largo de rectas que penetran en el interior de la esfera, o bien a lo largo de circunferencias máximas sobre la superficie esférica? Explica tu respuesta.

(d) ¿Pasarán por el punto B todas las circunferencias máximas que contienen al punto A? Explica tu respuesta.

(e) ¿Pasará también por el punto D alguna otra circunferencia máxima que pase por el punto A? Explica tu respuesta.

3. (a) ¿Cuántas circunferencias máximas pasan por un punto dado de la esfera, tal como el Polo Norte?

(b) ¿Cuántas circunferencias menores pasan por un punto dado de una superficie esférica?

(c) ¿Puede una circunferencia menor pasar por un par de puntos antipódicos sobre la superficie esférica? Explica tu respuesta.

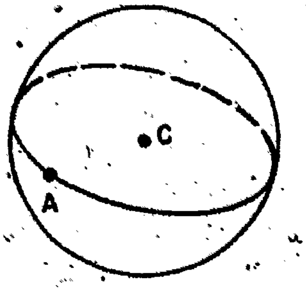
4. (a) Sobre una superficie esférica, ¿interseca toda circunferencia menor a toda otra circunferencia menor? Explica tu respuesta.

(b) Sobre una superficie esférica, ¿interseca toda circunferencia máxima a toda otra circunferencia máxima? Explica

tu respuesta.

5. (a) ¿En cuántos puntos corta cada meridiano al Ecuador? Explica tu respuesta.
   (b) ¿En cuántos puntos corta cada meridiano a cada paralelo de latitud?
   (c) ¿Interseca un paralelo de latitud a todo otro paralelo de latitud? Explica tu respuesta.

6. En el dibujo que se muestra a la derecha, C representa el centro de una esfera y A un punto sobre su superficie.



   (a) Supón que D es un punto que está entre A y C sobre el segmento $\overline{AC}$. ¿Dónde está situado D con respecto a la superficie esférica?
   (b) E es un punto sobre la recta $\overleftrightarrow{AC}$, pero no está sobre $\overline{AC}$. ¿Debe estar E en el interior de la esfera?
   (c) B es un punto sobre la recta $\overleftrightarrow{AC}$ y está sobre la superficie esférica. ¿Qué relación hay entre los puntos A y B? Explica tu respuesta.
   (d) Supón que un punto E es antípoda del punto A. ¿Estará E sobre $\overleftrightarrow{AC}$? Explica tu respuesta.
   (e) Si $\overline{AB}$ es un diámetro de la esfera, ¿qué nombre se puede dar a $\overline{AC}$ o a $\overline{BC}$?

7. En el capítulo sobre circunferencias y círculos en el Volumen I, se ha definido el interior de una circunferencia de radio r y centro C, como el conjunto de todos los puntos situados a una distancia menor que r del centro C. (Este conjunto incluye también al centro C.)
   (a) Usando la definición anterior como ejemplo, define el interior de una superficie esférica.
   (b) De manera análoga, define el exterior de una superficie esférica.
   (c) De manera análoga, define una superficie esférica.

12-3. Propiedades de las circunferencias máximas

¿Recuerdas cuándo aprendiste que la tierra es esférica? Algunos niñitos se asombran cuando oyen por primera vez que la tierra es esférica. Sin embargo, esto no debe extrañarnos, pues sabemos que hasta el tiempo de Colón muchas personas mayores e inteligentes creían que la tierra era plana. Si esto fuera cierto, ¿cómo podría una persona dar "la vuelta al mundo"?

Usamos el término "navegar" para describir el procedimiento de dirigir nuestros movimientos sobre la tierra. Al navegante le corresponde escoger la ruta o dirección que debe seguir un barco o un aeroplano. A fin de evitar gastos inútiles, el navegante debe tratar de dirigir el movimiento del barco, o aeroplano, a lo largo de la ruta más directa entre dos estaciones sucesivas.

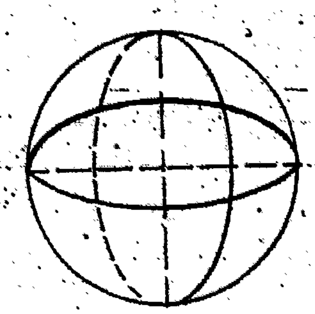
Supongamos que quieres hacer un viaje corto. Por viaje corto entendemos el permanecer dentro de las fronteras de uno de los estados más pequeños, como Connecticut. Para guiarte en tal viaje puedes usar un mapa de carreteras. La mayor parte de los mapas de carreteras son planos. Supongamos que la superficie real de la región es plana y que las carreteras que unen las ciudades son segmentos de recta. Supón ahora que vas a usar una avioneta y que puedes viajar a lo largo de segmentos de recta. Para tal viaje sería fácil elegir la ruta más corta y la dirección a seguir.

Sin embargo, si planeas un viaje de San Francisco a Londres o de Nueva York a Buenos Aires, un mapa de carreteras no te servirá mucho. Para viajes como ésos te será más útil un modelo de la tierra, como un globo, en vez de un mapa plano. Algunas veces encontrarás que las cosas no son lo que parecen ser.

Para comprender mejor el viaje sobre el globo, repasemos algunas de las propiedades fundamentales de la superficie esférica. En los Ejercicios 12-2 se introdujeron dos ideas fundamentales sobre la superficie esférica. Esas ideas se refieren a circunferencias máximas. La primera idea puede enunciarse como una propiedad.

Propiedad 1. Todo par de circunferencias máximas diferentes se intersecan en dos puntos antipódicos.

Esta propiedad se puede probar fácilmente así:



(1) Toda circunferencia máxima de una superficie esférica está en un plano que pasa por el centro de la esfera.

(2) Todos los planos que contienen una circunferencia máxima tienen el centro en común, y por consiguiente, cualesquiera dos de tales planos deben intersecarse.

(3) El conjunto intersección de dos planos que se intersecan es una recta.

(4) Esta recta interseca a la superficie esférica en dos puntos antipódicos, pues es una recta que pasa por el centro de la esfera.

(5) Entonces, estos puntos antipódicos son los puntos de intersección de las dos circunferencias máximas que están en esos planos.

Utilizaremos esta propiedad en el estudio sobre las distancias entre puntos que se hallan sobre la superficie esférica.

En la sección anterior hemos establecido que la distancia más corta entre dos puntos cualesquiera que estén sobre la superficie de una esfera se mide a lo largo de una circunferencia máxima. Cuando se estudia geometría en el segundo ciclo secundario, se demuestra esta afirmación. No lo haremos ahora, pero usaremos el resultado como un hecho.

Supón que buscas la ruta más corta entre dos puntos sobre el globo terráqueo y que tienes que ir del Polo Norte al Polo Sur. ¿Hay un camino más corto? Todo meridiano es una ruta posible. Si imaginamos la tierra como una esfera, los meridianos son congruentes. Entonces, no importa qué meridiano se toma como camino. Para dos antípodas cualesquiera, hay infinidad de caminos de longitud mínima, a saber, todas las circunferencias máximas determinadas por los dos puntos antipódicos.

Pero, ¿qué pasa si los dos puntos no son antípodas? ¿Cuántos caminos posibles que sigan circunferencias máximas hay? Podemos

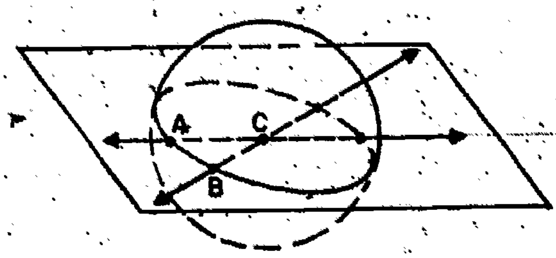
mostrar que hay solamente dos posibles caminos sobre circunferencias máximas entre esos dos puntos. Además, ambos caminos están sobre una misma circunferencia máxima. Esta es la siguiente propiedad importante:

Propiedad 2. Por dos puntos cualesquiera no antipódicos de una superficie esférica pasa exactamente una circunferencia máxima.

Podemos demostrar esta propiedad de la siguiente manera:

(1) Considera cualesquiera dos puntos no antipódicos, A y B, sobre una superficie esférica.

(2) Como A y B no son antípodas, una recta que pase por A y por el centro C de la esfera no puede pasar por B. (Análogamente, $\overleftrightarrow{BC}$ no contiene al punto A.)

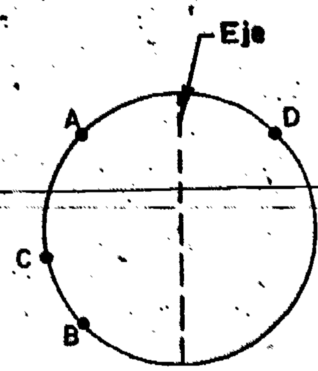


(3) Por los tres puntos A, B y C pasa exactamente un plano, pues esos tres puntos no son colineales.

(4) El plano que contiene a A, B y C, contiene solamente una circunferencia máxima con centro en C.

(5) Esta circunferencia máxima es, pues, la única circunferencia máxima que pasa por A y B.

Esta propiedad nos dice que si dos puntos sobre la superficie esférica no son antipódicos, hay exactamente un camino más corto entre ellos. Naturalmente, hay dos direcciones que podemos seguir sobre la circunferencia máxima que contiene a A y B. En la figura de la derecha vemos que una ruta, ADB, pasaría por D, y la otra, ACB, pasaría por C. Como A y B no son antípodas, una ruta debe ser más corta que la otra. Naturalmente, escogemos la más corta. ¿Puedes indicar la ruta más corta



sobre el dibujo?

Desde el punto de vista de las distancias más cortas, las circunferencias máximas sobre la esfera se comportan como las rectas sobre un plano. Hemos mostrado también que por dos puntos cualesquiera de la superficie esférica pasa exactamente una circunferencia máxima, a menos que los puntos sean antipódicos. Pero las circunferencias máximas sobre la superficie esférica no se comportan como las rectas en todos los aspectos, pues dos circunferencias máximas <u>cualesquiera</u> se intersecan en <u>dos</u> puntos. Entonces, no hay circunferencias máximas paralelas sobre la superficie esférica.

<u>Ejercicios 12-3</u>

Para resolver los problemas 1 a 3, usa un globo terráqueo, una cuerda y una regla.

1. Localiza los siguientes lugares geográficos sobre el globo terráqueo: Nome, Alaska; Estocolmo, Suecia.
   (a) Coloca un extremo de la cuerda en el punto en que has localizado a Nome. Extiende la cuerda de manera que pase por el Polo Norte y continúe hasta alcanzar Estocolmo. Marca cuidadosamente sobre la cuerda el punto que cae sobre la posición de Estocolmo. ¿Cuál es la distancia en pulgadas, medida sobre el globo, de Nome a Estocolmo (representada por el segmento marcado sobre la cuerda)?
   (b) Usando una cuerda y una regla, ¿cuál es la distancia de Nome a Estocolmo a lo largo de una ruta directamente hacia el este de Nome?
   (c) En virtud de los resultados anteriores, ¿cuál es la distancia más corta entre los dos puntos representados por Nome y Estocolmo: un camino que sigue una circunferencia máxima o el que sigue la circunferencia menor que es el paralelo de latitud?
2. (a) ¿Cuál es la distancia de Nome a Roma a lo largo de una circunferencia máxima que pase por un punto cerca del Polo Norte?
   (b) ¿Cuál es la distancia de Nome a Roma a lo largo de un

camino suboriental que pase por el extremo sur de la bahía de Hudson, y por un punto de la frontera entre España y Francia?

(c) ¿Qué diferencia hay entre tus resultados en (a) y (b)?

3. Un comerciante que vive en Singapur, Malaya, planea un viaje directo, o sin escalas, hasta Quito, Ecuador. ¿Cuál es la mejor ruta entre estos dos puntos?

4. Explica por qué yendo directamente hacia el norte, el camino sería el más corto pero no necesariamente el más seguro o el mejor, para viajar a un punto de la tierra directamente al norte de tu punto de partida.

5. (a) Explica por qué viajar directamente hacia el este no siempre es la manera más eficaz de ir a un punto situado directamente hacia el este.

(b) ¿Cuándo una ruta directamente hacia el este o el oeste es siempre la más eficaz?

*6. Dados tres puntos sobre una esfera, ¿puede hacerse pasar por ellos una circunferencia (máxima o menor) situada sobre la esfera?

7. PROBLEMA DIFICIL. Un cazador parte directamente hacia el sur de su campamento. Camina durante dos horas sin encontrar animales de caza. Luego camina 12 millas directamente hacia el este. En este punto caza un oso. Para regresar a su campamento viaja luego directamente hacia el norte. ¿De qué color era el oso? (Nota: Este problema tiene una respuesta.)

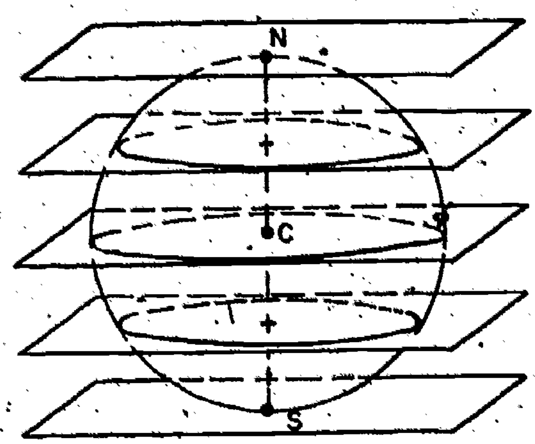
12-4. Localización de puntos sobre la superficie de la tierra

Sabes cómo localizar los puntos de una ciudad por medio de las calles y de los números de las casas. Supón, sin embargo, que proyectas visitar a un amigo que vive en una hacienda. Necesitas algunas instrucciones para hallar el sitio de la casa de tu amigo. Podrían decirte: "Parte de donde estás. Desde ese punto, camina 2 millas hacia el este y luego 1 milla hacia el norte". Estas instrucciones te dan tres datos: un punto de partida (o de referencia), las direcciones que debes seguir desde el punto de

partida y las distancias que debes recorrer en esas direcciones.

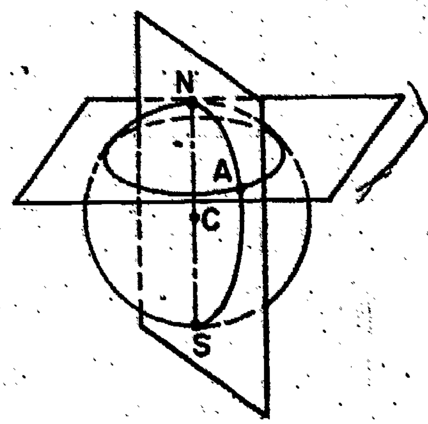
Imagina que eres piloto de un avión intercontinental, o capitán de un barco y, por tanto, responsable de la dirección en que navega el barco o el avión. La ruta puede seguir varias direcciones, pero antes de adoptar una de ellas, debes saber dónde estás. Es decir, primero debes conocer tu posición sobre la tierra. Conociendo la posición de la nave sobre el mapa, se puede determinar el itinerario correcto. Tu primera tarea es localizar tu posición. ¿Cómo se puede hacer esto?

Para localizar puntos sobre la superficie de la tierra, imaginamos que la tierra es una esfera y definimos sobre su superficie dos familias de curvas. Una de esas familias de curvas consiste en las circunferencias llamadas paralelos que hemos mencionado en la Sección 12-2. Entonces teníamos un conjunto de planos paralelos que cortaban la tierra en secciones horizontales, como se muestra en la figura de la derecha. El plano superior es tangente en el Polo Norte, y el plano inferior es tangente en el Polo Sur. La intersección de cada uno de los planos restantes con la superficie de la tierra es una circunferencia. Las circunferencias determinadas por esos planos son todas circunferencias menores, excepto el Ecuador que es una circunferencia máxima. Todas esas circunferencias se denominan <u>paralelos de latitud</u>. Se llaman "paralelos" porque están determinadas por planos paralelos al plano que pase por el Ecuador.



La segunda familia de curvas consiste en los meridianos, que también hemos descrito al comienzo de este capítulo. Recuerda que los meridianos son semicircunferencias máximas que tienen por extremos los polos. Entonces, toda circunferencia máxima que pasa por los polos consiste en dos meridianos. Todo meridiano tiene como diámetro el eje de la tierra.

Sea A un punto sobre la superficie esférica, como se muestra, a continuación. Hay exactamente un plano que pasa por A, perpendicular al eje de la tierra. Este plano contiene el paralelo de latitud que pasa por A. Hay exactamente un meridiano que pasa por A, porque el punto A y el Polo Norte (o el Polo Sur) determinan una circunferencia máxima. Como esa circunferencia máxima pasa por los polos, el arco de la circunferencia máxima que contiene a A es un meridiano. Entonces, por cada punto de una esfera, excepto los polos, hay exactamente un paralelo de latitud y un meridiano.

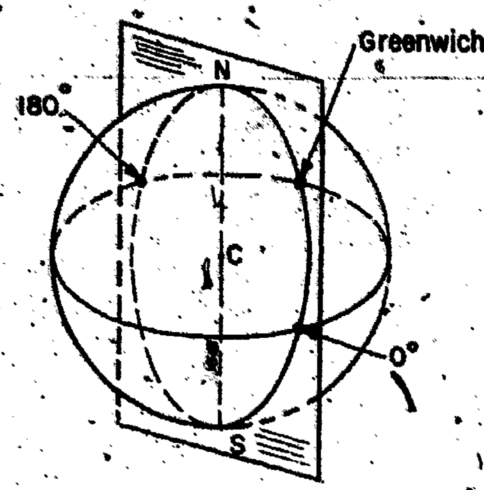


Nos queda solamente dar nombres a los meridianos y a los paralelos de latitud, mediante números convenientemente escogidos. ¿Cómo lo hacemos? Elegimos uno de los meridianos de la tierra como línea de referencia, y lo llamamos <u>meridiano cero</u>. Los otros meridianos están al este o al oeste del meridiano cero, así como las calles de una ciudad están al este o al oeste de la calle que utilizas como referencia.

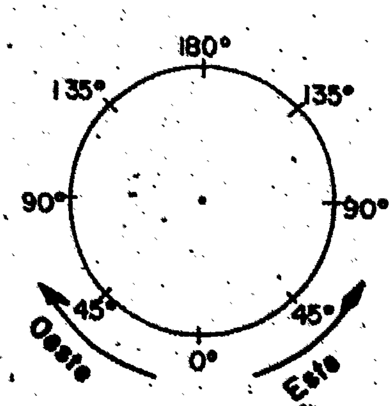
En la actualidad, se ha adoptado ya un meridiano cero para la tierra. Es el meridiano que pasa por cierta localidad llamada Greenwich (se pronuncia "Grén - ich"), en Inglaterra, cerca de Londres. Algunas veces este meridiano se llama <u>meridiano de Greenwich</u>, aun cuando el meridiano mismo pasa por un solo punto de la ciudad.

La intersección del meridiano de Greenwich con el Ecuador se marca 0°. A partir de ese punto, seguimos el Ecuador hacia el este o hacia el oeste hasta que alcancemos el meridiano que pasa por el antípoda del punto que hemos marcado con 0°. Este meridiano interseca al Ecuador en un punto que está a mitad de camino a lo largo del Ecuador a partir del punto marcado con 0°. Este nuevo punto se marca 180°. Podemos imaginar un plano que

interseca a la tierra en la circunferencia máxima que contiene los meridianos de 0° y 180°. El plano separa a la tierra en dos hemisferios, como se ve en la figura de la derecha. Cuando miras la figura, el hemisferio de la izquierda se llama hemisferio occidental. El hemisferio de la derecha se llama hemisferio oriental.

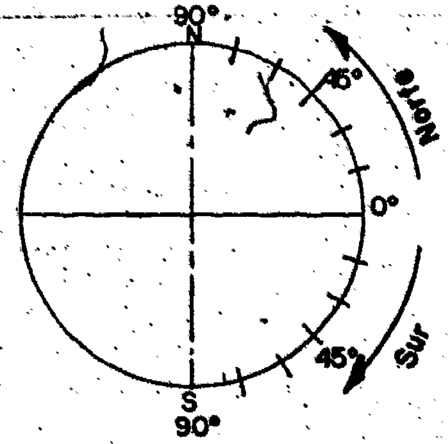


La circunferencia máxima que hemos llamado Ecuador, se divide en 360 partes iguales, como se indica a la derecha, tal como sería vista por un astronauta que estuviera sobre el Polo Norte. A las semicircunferencias del Ecuador, tanto a la izquierda como a la derecha del punto 0°, se les asignan números entre 0 y 180. Cada uno de esos números da nombre al meridiano que pasa por ese punto. Todo punto sobre la tierra puede ser localizado por un meridiano que pasa por ese punto. Por ejemplo, Los Angeles está aproximadamente sobre el meridiano 120° al oeste del meridiano de Greenwich. Tokyo está aproximadamente sobre el meridiano 140° al este de Greenwich. Decimos que la longitud de Los Angeles es aproximadamente 120° O (oeste). La longitud de Tokyo es aproximadamente 140° E.

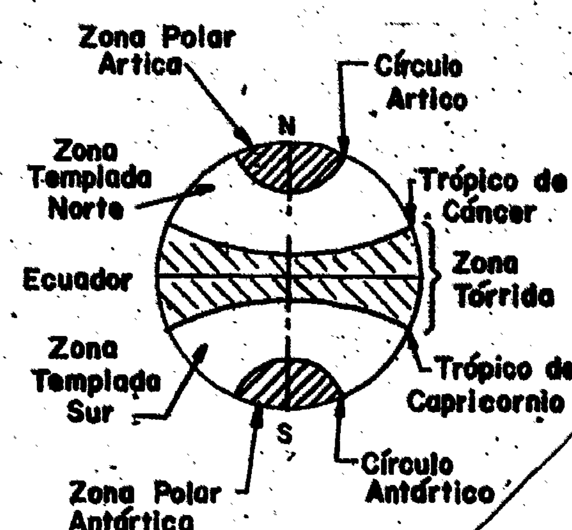


Los paralelos de latitud se localizan de la siguiente manera: El Ecuador se designa como paralelo cero. Todos los puntos encima del Ecuador están en el hemisferio norte, los puntos debajo del Ecuador están en el hemisferio sur. Tomamos un meridiano cualquiera, por ejemplo, el que pasa por Greenwich. La parte del meridiano que va de la intersección con el Ecuador hasta el Polo Norte se divide en 90 partes iguales, suponiendo que la tierra

es una esfera. Los números cardi-
~~nales entre 0 y 90 se asignan~~
a esos puntos. Cada punto determina un paralelo de latitud. Idéntica operación se realiza con la parte del meridiano al sur del Ecuador. Para todo punto sobre la tierra, localizamos el paralelo de latitud que contiene al punto. Por ejemplo, Nueva Orleáns está aproximadamente sobre el paralelo 30° al norte del Ecuador. Wéllington, Nueva Zelandia, está aproximadamente sobre el paralelo 40° al sur del Ecuador. Decimos que Nueva Orleáns tiene una latitud de aproximadamente 30° N (norte). La latitud de Wéllington es aproximadamente 40° S.



Algunos de los paralelos tienen nombres especiales. Los Círculos Artico y Antártico son paralelos situados a unos $23\frac{1}{2}$ grados de los Polos Norte y Sur. El Trópico de Cáncer está a unos $23\frac{1}{2}$ grados al norte del Ecuador, y el Trópico de Capricornio está a unos $23\frac{1}{2}$ grados al sur del Ecuador. Las porciones de superficie esférica entre dos paralelos de latitud se llaman zonas. Algunas de esas zonas tienen también nombres especiales, como se indica en el dibujo de la derecha. ¿Puedes localizar la zona en que vives? ¿Sabes designar el hemisferio en ~~que vives? ¿Podrías lograr dos respuestas correctas diferentes?~~



Para localizar un punto sobre la tierra, indicamos el meridiano y el paralelo de latitud que pasan por ese punto. Entonces damos la longitud y la latitud del punto. Por ejemplo, 90° O, 30° N localiza un punto en la ciudad de Nueva Orleáns. Decimos que la ciudad de Nueva Orleáns está aproximadamente en ese punto

sobre la tierra. Durbán, en el Africa del Sur, está situada en 30° E, 30° S, aproximadamente. Observa que siempre se indica primero la longitud. ¿Puedes localizar el hemisferio en que se halla un punto dado si conoces su longitud y latitud? Observa que la longitud y la latitud dan un sistema de coordenadas sobre la esfera del mismo modo que los ejes de abscisas y ordenadas dan un sistema de coordenadas sobre el plano.

Ejercicios 12-4

1. Usando un globo terráqueo, halla la posición aproximada de cada una de las ciudades que se enumeran más abajo. Indica la posición escribiendo primero la longitud, y luego la latitud. Asegúrate de incluir las letras E u O y N o S en tus respuestas.
   (a) Nueva York
   (b) Chicago
   (c) San Francisco
   (d) Londres
   (e) París
   (f) Moscú
   (g) Río de Janeiro
   (h) Melburne, Australia
2. Greenwich, Inglaterra, está situada aproximadamente sobre el paralelo de latitud marcado con 52° N. Sin pedir mayor información, escribe la posición de Greenwich.
3. Chisimaio, Somalía, en el Africa oriental, está situada sobre el Ecuador (o muy cerca del Ecuador). Está aproximadamente a 42 grados al este de Greenwich. Sin emplear mayor información, escribe la posición de Chisimaio.
4. Consulta enciclopedias, mapas y libros de ciencias sociales e historias para contestar a las siguientes preguntas:
   (a) ¿Cuál es el paralelo que separa a Corea del Norte de Corea del Sur?
   (b) Busca algunos estados, parte de cuyas fronteras están a lo largo de paralelos de latitud.
   (c) ¿Qué paralelo de latitud fue asunto de disputa entre los Estados Unidos y Gran Bretaña, al fijar su frontera en el Noroeste?
   (d) ¿A qué paralelo de latitud se hace referencia en el Compromiso de Misurí?
   (e) ¿Qué paralelo de latitud se asocia con la Línea de Mason

y Dixon?

(f) ¿Puedes averiguar la razón del nombre del país llamado Ecuador en Sud América?

5. Usando un mapa o un globo, halla algunas ciudades situadas aproximadamente en las siguientes longitudes y latitudes:

(a) 58° O, 35° S (b) 175° E, 41° S

6. Usando un mapa o un globo, halla algunas ciudades situadas aproximadamente en las siguientes longitudes y latitudes:

(a) 122° E, 35° N (b) 5° O, 41° N

7. (a) Compara la posición de la ciudad en tu respuesta de 5(a) con la posición de la ciudad en tu respuesta de 6(a).

(b) De modo análogo, compara las posiciones de las ciudades determinadas por 5(b) y 6(b).

(c) ¿Qué clase de puntos sugieren esas posiciones?

8. (a) Determina la posición de la ciudad en que vives.

(b) Determina el punto antípoda de esa ciudad.

(c) Si viajaras de un punto de la ciudad en que vives directamente a través del centro de la tierra, ¿te encontrarías en la China?

9. ¿Qué punto de los Estados Unidos está más cerca de Moscú, Rusia?

10. Usando un mapa u otra referencia, responde a las siguientes preguntas:

(a) ¿Está Reno, Nevada, al este de Los Angeles? Es decir, ¿está el meridiano que pasa por Reno al este del meridiano que pasa por Los Angeles?

(b) ¿Cerca de qué punto de Sud América pasa el mismo meridiano que pasa por Miami, Florida?

(c) ¿Cuál de las siguientes ciudades tiene una latitud más cercana a la de Nueva York: San Francisco, California; Pórtland, Oregón; o Seattle, Wáshington?

(d) ¿Cuál de las siguientes ciudades tiene su latitud más próxima a la de Nueva York: Londres; Madrid; o Casablanca, Marruecos?

*11. ¿Hay dos puntos diferentes sobre la tierra que tienen la misma

latitud y longitud? Si es así, ¿cuáles son? Si no es así, explica por qué no hay ninguno.

*12. ¿Hay puntos sobre la tierra que tengan más de una posición en términos de latitud y longitud? Explica por qué sí o por qué no.

*13. Determina una manera de hallar la posición de un punto antipódico, digamos de 90° O, 45° N, sin utilizar un globo o un mapa. Luego halla los antípodas de los siguientes puntos:
(a) 80° O, 25° S
(b) 100° E, 65° N
(c) 180° O, 52° S

*14. Averigua las razones de la localización del Círculo Artico y del Trópico de Cáncer.

*15. ¿Qué es y dónde está la Línea Internacional para Cambio de Fecha?

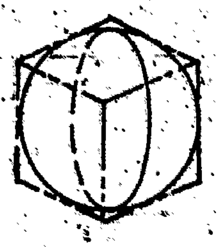
*16. Al sudeste de Australia, hay un grupo de islas llamadas las Antípodas. Fueron llamadas así porque son antípodas de Greenwich. Sin usar ningún globo o mapa, escribe la posición de las Antípodas. Cuando es medianoche en Greenwich, ¿qué hora del día es en las Antípodas? Cuando es mediados del verano en Greenwich, ¿qué estación es en las Antípodas? ¿Significa esto que cuando es 21 de junio en Greenwich, es 21 de diciembre en las Antípodas?

12-5. Volumen y área superficial de la esfera

En los capítulos anteriores se ha estudiado con detalle el cubo. Recuerda que es una superficie. El volumen de un cubo es el volumen del sólido rectangular cuya superficie es un cubo. Si la medida de la arista del cubo es e, entonces la medida, V_c, del volumen es e^3. El volumen del cubo es e^3 unidades cúbicas. El subíndice, c, indica simplemente que se trata del cubo.

Por volumen de una esfera, entendemos el volumen de un sólido limitado por la superficie esférica. En esta sección daremos una fórmula para la medida, V_s, del volumen. Representemos por r el radio (es decir, el número de unidades de longitud del radio) de

la superficie esférica y veamos primero cómo podemos obtener una medida aproximada del volumen de la esfera. Construye alrededor de la esfera el cubo más pequeño posible. Este cubo debe tocar la superficie esférica como se indica en el diagrama. Esto tiene la apariencia de una bola de béisbol dentro de una caja en la que cabe exactamente.



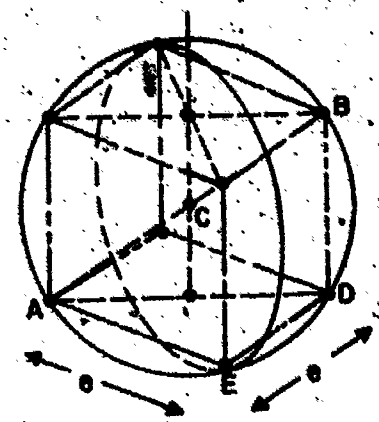
La arista del cubo tiene por medida $2r$. Entonces

$$V_c = (2r)^3 = 8r^3$$

Como la esfera está enteramente dentro del cubo, el volumen de la esfera es menor que el volumen del cubo. Por tanto

$$V_s < 8r^3$$

Ahora construyamos un cubo completamente contenido en la esfera, de modo que todos sus vértices estén sobre la superficie esférica. Los puntos A y B son vértices opuestos sobre el cubo, y C es el centro de la esfera y del cubo. Ves que C está en el segmento $\overline{AB}$. Entonces A y B son antípodas. ADE es un triángulo rectángulo, de manera que



$$(AD)^2 = e^2 + e^2 = 2e^2$$

donde e es el número de unidades de $\overline{AE}$. Ahora ADB es un triángulo rectángulo y por consiguiente,

$$(AD)^2 + (BD)^2 = (AB)^2$$

Pero $BD = e$ y $AB = 2r$. Entonces

$$2e^2 + e^2 = (2r)^2$$

$$3e^2 = 4r^2$$

$$e^2 = \frac{4}{3}r^2 = \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 3}r^2$$

$$e \cdot e = \left(\frac{2\sqrt{3}\,r}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}\,r}{3}\right)$$

$$e = \frac{2\sqrt{3}\,r}{3}$$

Por lo tanto, $V_c = e^3 = e^2 \cdot e = \frac{4}{3}r^2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}r = \frac{8\sqrt{3}}{9}r^3 \approx 1.53r^3$.

Como el volumen de la esfera es mayor que el volumen de este cubo,

$$V_s > 1.53r^3$$

Por consiguiente,

$$1.53r^3 < V_s < 8r^3$$

Hemos obtenido dos números entre los cuales está la medida del volumen de la esfera. En realidad, esos números no son muy próximos entre sí como puedes comprobar haciendo $r = 2$ y calculando los volúmenes de los dos cubos. Determinar una fórmula exacta para el volumen de la esfera es un problema difícil por ahora. Pero se puede demostrar que el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ unidades, donde π es el mismo número que hemos encontrado al trabajar con las circunferencias, y r es la medida del radio de la superficie esférica. Observa que $\frac{4}{3}\pi \approx 4$, de manera que $\frac{4}{3}\pi r^3$ ciertamente está entre $1.53r^3$ y $8r^3$. El número π es un número real aunque no es racional; es un número irracional. Se ha calculado su forma decimal con muchas cifras. Con cinco cifras decimales es

$$\pi = 3.14159\ldots$$

Aunque no lo hemos demostrado en este libro, usaremos el hecho de que el volumen, V_s, de una esfera con radio de medida r está dado por la fórmula

$$V_s = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ unidades cúbicas}$$

Si el radio de la esfera se mide en pulgadas, entonces el volumen se mide en pulgadas cúbicas. Las otras unidades se tratan de la misma manera.

Area superficial de una esfera

Hemos aproximado el volumen de la esfera comparándolo con los volúmenes del cubo más pequeño exterior a la esfera y el cubo más grande interior a la misma. Ahora nos preguntamos cómo estimar el área superficial de la esfera (el área de la cáscara de la naranja, por ejemplo).

Si observamos el cubo que construimos para encerrar la esfera, vemos que la arista del cubo tiene por medida $2r$. Entonces, cada cara del cubo tiene por área $2r \times 2r = 4r^2$. Hay 6 caras en el cubo, luego el área superficial total del cubo tiene por medida $6 \times 4r^2 = 24r^2$. Parece claro que el área de la superficie esférica es menor que el área de la superficie de este cubo que la encierra. Entonces,

$$A_s < 24r^2$$

donde A_s representa el área de la superficie esférica de radio r.

Observa ahora la superficie del cubo interior. Hemos visto antes que el cuadrado de la arista e era

$$e^2 = \frac{4}{3}r^2$$

Pero e^2 es justamente la medida del área de cada cara del cubo interior. Entonces el área superficial de este cubo interior es

$$6 \times \frac{4}{3}r^2 = 8r^2$$

Como el área superficial de la esfera es mayor que el área superficial de este cubo que está completamente contenida en la esfera, tenemos

$$8r^2 < A_s$$

De estas dos desigualdades, obtenemos

$$8r^2 < A_s < 24r^2$$

También ahora, como en el caso del volumen de la esfera, no hemos obtenido límites que son muy próximos entre sí, pero tenemos una idea aproximada del área y el método sugiere cómo obtener una aproximación mejor del área superficial. En uno de nuestros cursos más adelantados demostraremos que:

El área de la superficie esférica es $4\pi r^2$ unidades cuadradas de área, donde r es la medida del radio de la esfera. Si A_s representa el área de la superficie es esférica,

$$A_s = 4\pi r^2$$

Observa que $A_s = 4\pi r^2$ es aproximadamente $A_s \doteq 12.6r^2$, que está dentro del intervalo de $8r^2$ a $24r^2$ que hemos hallado anteriormente para A_s.

Podemos comparar esta área superficial con el área de un círculo máximo de la esfera. Un círculo máximo tiene radio r y, por tanto, su área será πr^2 unidades cuadradas. Entonces,

$$A_s = 4 \times \pi r^2 \quad \text{ó,}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{área superficial}\\ \text{de la esfera}\end{matrix}\right\} = 4 \times \left\{\begin{matrix}\text{área de uno de sus}\\ \text{círculos máximos}\end{matrix}\right\}.$$

Si el radio de la esfera se mide en pulgadas, su área superficial se mide en pulgadas cuadradas.

Pompas de jabón

Desarrollemos algunas ideas que nos ayuden a estudiar las pompas de jabón. En primer lugar, consideremos una esfera de radio 2 unidades. Entonces nuestras fórmulas nos dan

$$A_s = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi \quad \text{y} \quad V_s = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi$$

para el área y el volumen de la esfera respectivamente. Supón que tenemos un cubo del mismo volumen que la esfera. ¿Qué relación habría entre el área superficial del cubo y el área superficial de la esfera? El volumen de la esfera es un poco mayor que 32, pues π es un poco mayor que 3. Entonces, si e es el número de unidades de la arista del cubo, e^3 debe ser un poco mayor que 32, pues e^3 es el volumen del cubo. Como resultado, e es un poco mayor que 3. Con otras palabras, la longitud de la arista del cubo que tiene el mismo volumen que la esfera será ligeramente mayor que 3 unidades. Como el cubo tiene seis caras, $A_c = 6e^2$. Entonces su área será mayor que $6 \cdot 3^2 = 54$. Este número es ciertamente mayor que 16π, el área superficial de la esfera. Si hubiéramos efectuado este cálculo con mayor precisión, las áreas

hubieran resultado así:

$$A_s \approx 50.26, \quad A_c \approx 62.48,$$

lo que revela una discrepancia bastante grande.

Supón que tratamos otro ejemplo y consideramos la esfera de radio 5 unidades. Entonces las fórmulas nos dan

$$A_s = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi \quad y \quad V_s = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3}\pi$$

Aquí V_s es aproximadamente 527 y entonces, para un cubo del mismo volumen, $V_c \approx 527$. Luego $e^3 \approx 527$, de manera que e es un poco mayor que 8, pues $8^3 = 512$. Según esto, A_c es un poco mayor que $6 \cdot 8^2 = 384$. En este ejemplo, $A_s \approx 314.16$ y $A_c \approx 384$. Nuevamente el área de la superficie esférica es claramente menor que el área del cubo de igual volumen. Estos son dos ejemplos del siguiente hecho:

> Si una esfera y un cubo tienen iguales volúmenes, el área superficial de la esfera es menor que el área superficial del cubo.

En realidad, se cumple un enunciado más fuerte:

> Si un sólido cualquiera tiene el mismo volumen que una esfera, el área superficial de la esfera es menor o igual que el área superficial del sólido.

Ahora, ¡a nuestra pompa de jabón! La película de jabón tiene cierta elasticidad. Esa elasticidad "tracciona" la película tanto como puede. Como el aire contenido dentro de la burbuja tiene un volumen dado, las propiedades físicas requieren que la superficie tenga un área tan pequeña como sea posible para ese volumen. Como se ha establecido en el párrafo anterior, esa área será mínima cuando la superficie sea la de una esfera. Esta es la razón por la cual las pompas de jabón son esféricas.

Ejercicios 12-5

1. Halla el volumen de las esferas cuyos radios se indican a continuación. Toma $\pi \approx \frac{22}{7}$.

(a) $r = 3$ plg.
(b) $r = 10$ pies
(c) $r = 4$ yd.
(d) $r = 6$ cm.
(e) $r = 5.6$ plg.
(f) $r = 6.6$ plg.
(g) $r = 8.4$ mm.
(h) $r = 4.2$ pies

En los problemas 2, 3, 5 y 6, toma π aproximadamente igual a 3.14.

2. Determina las áreas superficiales de las esferas del problema 1.
3. Un tanque de combustible tiene la forma de una esfera cuyo diámetro es 50 pies. El tanque está apoyado sobre una losa de hormigón.
   (a) Si la pintura cuesta \$6 el galón y un galón cubre 400 pies cuadrados, ¿cuánto cuesta pintar la superficie del tanque?
   (b) Si el combustible cuesta 13 centavos el galón, determina el valor del combustible contenido en el tanque. Supón que el tanque está lleno. (1 pie cb. $\approx 7\frac{1}{2}$ gal.)
4. Supón que tu mamá tiene un depósito con la forma de un hemisferio de 8 pulgadas de radio, y pide prestada la cantidad de azúcar que cabe dentro de ese depósito, prefiriendo pagarla en vez de devolverla. Supón que el azúcar cuesta 10 centavos la libra y que 1 libra ocupa 32 pulgadas cúbicas. Toma $\pi \approx 3$. ¿Cuánto debe pagar tu mamá?
5. Un fabricante de mapas desea fabricar 100 globos de hoja plástica, de manera que el diámetro de cada globo sea 18 pulgadas. Halla el costo de los globos si el plástico cuesta 50 centavos el pie cuadrado.
6. Un balón esférico tiene un diámetro de 40 pies. ¿Qué cantidad de gas contendrá si se le ha quitado todo el aire?
7. (a) Si el radio de una esfera se duplica, ¿cuál es el efecto sobre el volumen? ¿Y sobre el área superficial?
   (b) Si el radio de una esfera se triplica, ¿cuál es el efecto sobre el volumen? ¿Y sobre el área superficial?

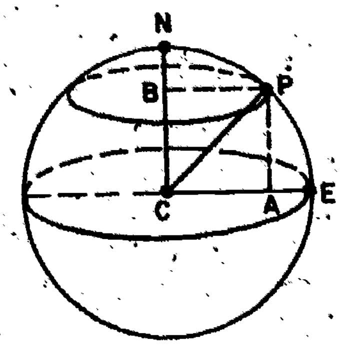
*8. Dos esferas tienen sus radios en la razón $\frac{3}{2}$.

(a) Determina la razón entre sus volúmenes.

(b) Determina la razón entre sus áreas superficiales.

12-6. Longitudes de las circunferencias menores

¿Cómo hallaríamos la longitud de una circunferencia de latitud? En esta sección mostraremos cómo puede hacerse este cálculo usando los valores de los cosenos de los ángulos. Primero dibuja una figura de la tierra. Llama N al Polo Norte, C al centro de la tierra, P a un punto sobre la superficie de la tierra y E al punto directamente al sur de P sobre el Ecuador. La figura muestra la circunferencia máxima que pasa por P y E. Entonces la medida en grados del ángulo PCE es la latitud del punto P. Sea A un punto tal que el ángulo PAC sea recto, y B un punto sobre el eje de la tierra de manera que el ángulo PBC sea recto. Entonces PBCA es un rectángulo y, por consiguiente, $\overline{PB}$ es congruente con $\overline{CA}$; es decir, las longitudes PB y CA son iguales. Pero $\frac{CA}{CP}$ es igual al coseno del ángulo PCA. Entonces si L° es la latitud de P, tenemos



$$\frac{CA}{CP} = \cos L°$$

El Ecuador es la circunferencia máxima que se muestra en la figura contenida en un plano perpendicular al papel y que pasa por E. El radio de la circunferencia es $\overline{CE}$. Designa la longitud de esta circunferencia máxima con la letra e. Entonces, la longitud del Ecuador es $2\pi(CE) = 2\pi(CP)$, o

$$e = 2\pi(CP)$$

¿Por qué es CP = CE? La circunferencia de latitud en P tiene su centro en B, su radio es $\overline{BP}$ y su plano es perpendicular a $\overline{NC}$.

Denota la medida de la longitud de la circunferencia de latitud por p. Entonces

$$p = 2\pi(BP) = 2\pi(CA)$$

De acuerdo con esto,

$$\cos L^\circ = \frac{CA}{CP} = \frac{2\pi(CA)}{2\pi(CP)} = \frac{p}{e}$$

¿Qué propiedad representa la segunda igualdad de la última línea? Como $\cos L^\circ = \frac{p}{e}$, se deduce que $p = e \cos L^\circ$.

La longitud del Ecuador tiene unas 25,000 millas. Esto da

$$p \approx 25{,}000 \cos L^\circ$$

donde L° es la latitud del punto P. Si se conoce la latitud del punto, la longitud de la circunferencia menor que pasa por ese punto puede calcularse mediante los cosenos de los diversos ángulos que se dan en la tabla del Capítulo 9.

Ejemplo. La latitud de cierta ciudad es 35°. Calcula la longitud aproximada de la circunferencia menor que pasa por la ciudad. La longitud de la circunferencia menor es de unos $25{,}000(\cos 35^\circ)$ millas, es decir, $25{,}000(0.8192)$ millas, lo que es 20,480 millas.

Ejercicios 12-6

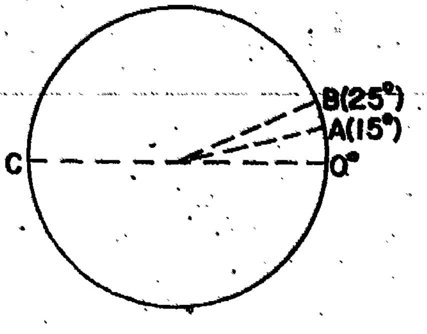
1. Calcula con la aproximación de una decena de millas la longitud de una circunferencia de latitud que pasa por el punto cuya latitud se da a continuación:

   (a) 15° (b) 75° (c) 45°

2. La ciudad A tiene por longitud 15° E y la ciudad B tiene por longitud 25° E. Las ciudades están sobre el mismo paralelo de latitud, 30° N.

   (a) Determina la longitud de la circunferencia de latitud en la que está la ciudad.

   (b) El diagrama representa la circunferencia de latitud. Calcula la



longitud de la semicircunferencia OBC.

(c) Determina las diferencias entre las longitudes de A y B.

(d) La longitud del arco $\widehat{AB}$ es _____ (parte fraccionaria) de la longitud de la semicircunferencia.

(e) Calcula la longitud de $\widehat{AB}$.

(f) Un aeroplano vuela cerca de la superficie de la tierra y sigue el paralelo de latitud de A a B. Si viaja a 400 millas por hora, ¿qué tiempo le lleva el viaje?

3. ¿Qué distancia hay entre los meridianos 10° O y 70° O, en la latitud 40° N, a lo largo del paralelo?

*4. Por tiempo solar se designa el tiempo determinado por la posición del sol. Las zonas de tiempo normalizado no deben entrar en este problema.

(a) Si el tiempo solar es 7:00 a.m. en el meridiano 10° O, halla el tiempo solar en el meridiano 70° O.

(b) Si el tiempo solar es 7:00 a.m. en el meridiano 70° O, halla el tiempo solar en el meridiano 10° E.

*5. Las ciudades A y B tienen, ambas, la latitud 40° N y están en la zona de igual hora; es decir, una persona no cambia la hora de su reloj al ir de una ciudad a otra. El sol sale en A exactamente una hora después que en B. ¿Qué distancia hay entre las ciudades y en qué dirección está A con respecto a B?

6. <u>OPCIONAL.</u> En la Sección 12-5 hemos efectuado algunos cálculos para ayudarnos a determinar el volumen de una esfera. Esos cálculos nos han dado resultados aproximados. Se ha indicado que la fórmula correcta para el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. También hemos dicho que no trataremos de demostrar esa fórmula ahora. Posteriormente, en cursos de matemáticas más avanzados, aprenderás a demostrar que la fórmula dada es correcta.

Trata de hacer lo siguiente para verificar que la fórmula para el volumen de la esfera es correcta. Debes efectuar cuidadosamente todas las medidas para este experimento.

OBJETIVO. Verificar que la fórmula para el volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

MATERIALES. (a) Una esfera (una pelota de sóftbol nos vendría bien).

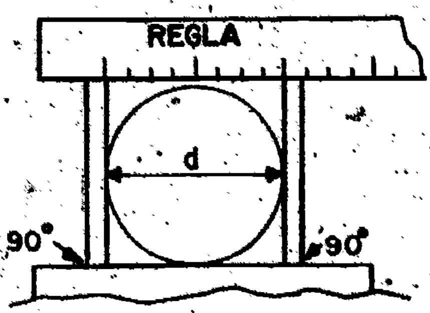
(b) Un depósito (uno cuya forma interior sea la de un sólido rectangular, tal como una caja de leche de medio galón sin su tapa).

(c) Una regla (graduada en 16 avos de pulgada o en décimas de centímetro).

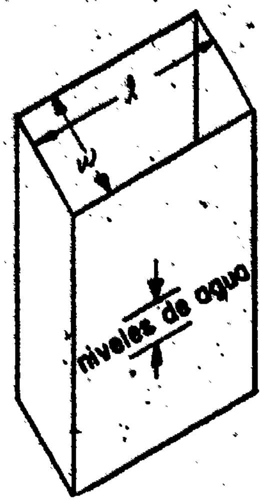
(d) Un depósito que contenga más o menos un cuarto de galón de agua.

DIRECTIVAS.

(1) Mide el diámetro como se indica a la derecha. Calcula el radio de la esfera.



(2) Mide el largo y el ancho del interior del depósito. Luego llénalo parcialmente con agua. Marca cuidadosamente el nivel del agua. Sumerge la esfera en el agua de manera que quede completamente cubierta. Marca cuidadosamente el nuevo nivel del agua. Determina la medida de la distancia que ha subido el nivel del agua.



(3) Calcula el producto de las medidas de las siguientes magnitudes: el largo del interior del depósito; el ancho del interior del depósito; la distancia que ha subido el nivel del agua.

(4) ¿Es la respuesta de la pregunta (3) el volumen de la esfera? Explica por qué sí o por qué no.

(5) Calcula el valor de r^3, utilizando el radio de la esfera. ¿Es r^3 menor que el volumen de la esfera?

(6) Determina el producto de π y r^3. ¿Es la respuesta menor que el volumen de la esfera?

(7) Divide la respuesta de (3) por la respuesta de (6). Si has hecho cuidadosamente tu trabajo, debes obtener una respuesta aproximadamente igual a $1\frac{1}{3}$ ó 1.3. ¿La has obtenido? ¿Qué relación hay entre $1\frac{1}{3}$ ó 1.3 y $\frac{4}{3}$?

Capítulo 13

LO QUE NADIE SABE EN MATEMATICAS

13-1. Introducción

Con los artículos que constantemente se ven en periódicos y revistas, referentes a cohetes, satélites artificiales y radiotelescopios, para no mencionar los nuevos antibióticos y muchas otras cuestiones referentes a la medicina espacial, todos estamos enterados del activo trabajo y de los muchos problemas no resueltos en las diferentes ramas de la ciencia. Muchas personas, sin embargo, tienen la curiosa idea de que las matemáticas constituyen un tema terminado y muerto, que fue embalsamado dentro de las pastas de un libro poco tiempo después de Sir Isaac Newton. Actualmente las matemáticas están en tanta actividad como cualquiera de los campos que acabamos de mencionar, y tienen una amplia variedad de problemas aún no resueltos que desafían a los hombres de ciencia más inteligentes.

No solamente han crecido en cantidad las matemáticas, sino que el número de tipos de matemáticas está creciendo a una velocidad pasmosa. Al final de este capítulo se reproduce la clasificación de los temas de Mathematical reviews, una publicación que contiene resúmenes breves de las investigaciones matemáticas y que anualmente publica más de 1,000 páginas a doble columna. Hay 436 temas en la lista, que es más del cuádruple de los que aparecían en la clasificación previa, de 1958. La mayor parte de esos nombres no te son familiares. Probablemente estás tentado de asociar las nuevas matemáticas con las máquinas de calcular, una nueva e importante rama en la materia; pero observarás que el título "Máquinas de calcular" ocupa una pequeña porción de la lista llamada "Análisis numérico".

Algunos de los temas tienen nombres familiares, tales como geometría y álgebra, pero encontrarás muy pocos nombres familiares bajo esos títulos. Una persona que se gradúa con el título de Doctor en Matemáticas no puede aspirar a tener un profundo conocimiento más que de unos pocos de los temas que aparecen en la lista. Además, la

mayor parte de las aplicaciones de las matemáticas no se consideran en esta lista, sino que aparecen en otras publicaciones.

En este capítulo conocerás algunos problemas no resueltos en matemáticas. Por supuesto, no se trata de problemas no resueltos típicos, pues debemos escoger algunos que tengan algún sentido para ti y en los cuales puedas hacer algún pequeño progreso. Pero aun la mayor parte de los resultados que enunciaremos se obtienen por métodos mucho más avanzados que los que conoces; nadie sabe aún cómo serán resueltos finalmente, ni si serán resueltos, dichos problemas.

13-2. Una conjetura sobre los números primos

En esta sección y en la siguiente, consideraremos algunos problemas sobre los números primos. El matemático está principalmente interesado en el problema por sí mismo, pero puede sorprenderte el saber que aun en estos casos hay aplicaciones. Algunas de las propiedades de los números primos se usan, por ejemplo, para verificar la exactitud de los programas propuestos a las calculadoras. Tales propiedades se usan también para determinar sucesiones de los llamados "dígitos al azar". Hablando a grosso modo, una sucesión de dígitos al azar es una sucesión de números entre 0 y 9, inclusive, en la cual no hay ninguna ley de formación. Un decimal periódico, por ejemplo, tendría una ley definida o "modelo", pero no parece haber ningún modelo prefijado en el decimal correspondiente a $\sqrt{2}$.

Anteriormente has trabajado con números primos. Recordarás que un número primo es un número natural mayor que 1 que no tiene más factores que sí mismo y 1. Seguramente has usado un método llamado la Criba de Eratóstenes para hallar los números primos hasta cien. Al final de este capítulo hallarás una lista de los números primos hasta 1,000. La mayoría de las bibliotecas universitarias tienen una lista de números primos hasta diez millones ("Lista de números primos de 1 a 10,006,721", por D.N. Lehmer, Carnegie Institution of Washington, 1914).

Los números primos tienen propiedades muy interesantes. Una

muy importante que has usado con frecuencia es la que dice que todo número natural excepto 1, o bien es un número primo, o bien se puede escribir como un producto de factores primos de una única manera salvo el orden de los factores. Por ejemplo, $38 = 2 \times 19$ y $75 = 3 \times 5 \times 5$. Por ejemplo, cualquiera que sea la manera en que escribas 75 como un producto de números primos, habrá dos números 5 y un número 3. Usas el método de descomponer un número en factores primos casi siempre que necesitas expresar una fracción en su forma irreducible. Se podría preguntar qué números podemos obtener sumando primos. Es fácil ver que todos los números naturales mayores que 1 pueden obtenerse sumando primos. Para mostrarlo, supón primero que n es un número par cualquiera. Entonces $n = 2k$, donde k es un determinado número natural. ¿Por qué? Pero entonces $n = 2 + 2 + \ldots + 2$, donde el 2 aparece k veces en la suma y como 2 es un número primo, esto muestra que todo número par es una suma de primos. Supón ahora que n es un número impar mayor que 1. En este caso, ¿qué clase de número es $n - 3$? ¿Es o bien 0 o bien un número natural par? ¿Por qué? Si $n - 3$ es 0 entonces $n = 3$, que es ya un número primo, mientras que si $n - 3$ es un número natural par, entonces $n - 3 = 2k$ y

$$n = 3 + 2 + 2 + \ldots + 2$$

donde el 2 aparece en la suma k veces. Entonces todo número natural es una suma de números primos. En efecto, hemos mostrado que podemos hacerlo usando solamente los números primos 2 y 3.

Ahora hacemos una pregunta más difícil. ¿Cuáles son los números naturales que pueden ser obtenidos como la suma de exactamente dos números primos? Como el menor número primo es 2, el menor número que es suma de exactamente dos primos debe ser 4, pues $4 = 2 + 2$. ¿Podemos expresar todo número natural mayor o igual que 4, como suma de exactamente dos números primos? Ensaya los números de 4 a 20. ¿Has encontrado alguno que no pueda ser escrito como una suma de dos números primos? ¿Cuántos? ¿Cuáles son? ¿Son todos ellos impares?

¿Puedes imaginar alguna razón en virtud de la cual es más difícil expresar un número impar como suma de dos números primos,

que un número par? ¿Quizá te ayude la siguiente observación: en la sucesión de números primos, el único número par es 2. ¿Por qué? Ahora, si la suma de dos números naturales es un número impar, ¿qué puedes decir de los dos números? ¿Es cierto que uno de ellos debe ser par y el otro impar? Entonces si un número impar es suma de dos números primos, uno de esos números primos es par y debe ser igual a 2. Entonces la única manera posible de escribir 11 es 2 + 9. Pero por desgracia 9 no es primo, y en consecuencia 11 no puede ser expresado como la suma de dos números primos.

Habiendo visto que no podemos obtener todos los números impares como suma de dos primos, dediquémonos a los números pares. Preguntémonos qué números pares mayores o iguales que 4, pueden ser expresados como la suma de dos primos. Como experimento, trata de completar la tabla siguiente para los números pares de 4 a 26:

4 = 2 + 2	10 =	16 =	22 =
6 = 3 + 3	12 =	18 =	24 =
8 = 3 + 5	14 =	20 =	26 =

¿Has podido completar la tabla y expresar cada número como una suma de dos primos? De paso, ¿cuántos de esos números se podrían escribir de más de una manera como suma de dos números primos? El menor de esos números es 10, pues 10 = 5 + 5 = 3 + 7.

Ejercicios 13-2

1. Continúa la tabla anterior para los números pares hasta 100. ¿Has podido expresar cada uno de ellos como la suma de dos números primos?
2. Para los números pares de 4 a 50, determina el número de maneras de escribirlos como una suma de dos números primos. Tabula los resultados de la siguiente manera:

Número par	Número de maneras	Número par	Número de maneras
4	1	28	
6	1	30	
8	1	32	
10	2	34	
12	1	36	
14	2	38	
16		40	
18		42	
20		44	
22		46	
24		48	
26		50	

Sobre la base de esta experiencia, ¿aventurarías una hipótesis acerca de la posibilidad de expresar todos los números pares mayores que 4 como una suma de dos números primos? Concretamente, ¿qué sospecharías sobre la verdad de la conjetura que sigue? (Una conjetura es justamente una sospecha razonada.)

"Todo número par mayor o igual que 4, puede ser representado como la suma de dos números primos".

Si piensas que esto es probablemente cierto, estás bien orientado. Este enunciado se conoce con el nombre de <u>conjetura de Goldbach</u>. Goldbach la sugirió en una carta al gran matemático Euler, pidiéndole que la probara. Euler no pudo probarla y, desde ese tiempo, muchos matemáticos han estudiado el problema. Sin embargo, hasta el presente, nadie sabe si el enunciado es verdadero o falso. Es una parte de las matemáticas que nadie conoce.

Sin embargo, se han hecho algunos progresos. En 1936, el matemático ruso Vinogradov mostró que todo número impar a partir de cierto número puede ser expresado como la suma de <u>tres</u> números primos. ¿Por qué decimos que esto se acerca a la conjetura de Goldbach? Porque si la conjetura de Goldbach es verdadera, entonces el teorema de Vinogradov es una consecuencia fácil. La demostración sería así:

Supongamos que la conjetura de Goldbach es verdadera. Entonces

sea n un número natural impar cualquiera mayor que 5. ¿Qué puedes decir sobre el número $n - 3$? ¿Es par o impar? ¿Es mayor que 2? De acuerdo con la conjetura de Goldbach, ¿qué puedes concluir sobre $n - 3$? Si $n - 3 =$ (suma de dos primos), entonces $n = 3 +$ (suma de dos primos). Entonces, ¿de cuántos numeros primos es n la suma? Este es el teorema de Vinogradov.

Debido a que este teorema y la conjetura de Goldbach están tan íntimamente relacionados, muchos matemáticos pensaron que Vinogradov estaba en el buen camino. No es imposible que algún día él resuelva el problema de Goldbach.

Te extrañará probablemente que se esté tratando de probar algo como la conjetura de Goldbach. No es suficiente probar experimentalmente si se cumple en un gran número de casos, digamos mediante una calculadora, pues hay infinitos números pares por probar, y no podemos probarlos todos. Necesitamos una regla general que se aplique a <u>todos</u> los números pares mayores que 2, que muestre que todos ellos pueden ser escritos como la suma de dos primos. Si encuentras esa ley, o si puedes encontrar un número par que <u>no</u> es la suma de dos números primos, tu nombre aparecerá en primera página en el mundo de las matemáticas.

13-3. <u>Distribuciones de números primos</u>

Observa la lista de los números primos al final de este capítulo. Esta lista tiene algunas propiedades interesantes. Por ejemplo, ya hemos observado que el número 2 es el único número primo par. Esto significa que una vez que pasemos 2, todos los números primos serán impares. Entonces la diferencia entre dos números primos consecutivos cualesquiera de la sucesión, es siempre par. ¿Por qué? Determina un par de números primos consecutivos cuya diferencia es 4. Haz lo mismo para cada una de las diferencias 2, 6, 8, 10, 12 y 14. ¿Hay una diferencia mayor que 14 en la parte de la sucesión de 2 a 307? De hecho, si examinas la sucesión de números primos hasta 500, no encontrarás ningún vacío mayor que 14. Sobre la base de esta evidencia podrías sospechar que no hay vacíos mayores que cierto número,

quizá 14.

Esta conjetura, sin embargo, es falsa. En efecto, hace mucho tiempo, alrededor de 300 años a. de J.C. Euclides demostró que hay vacíos tan grandes como queramos en la sucesión de los números primos. Por ejemplo, sea N el resultado de multiplicar todos los números naturales de 2 a 101.

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 101$$

Es mejor que no tratemos de efectuar este producto, pues si expresas N en la notación decimal habitual, te resultará un numeral de unos ¡160 dígitos!

El número N es divisible por todo número natural de 2 a 101, pues tiene a tales números como factores. Observa ahora el número $N + 2$. Podemos siempre escribir

$$N = 2 \cdot (3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 101) = 2S$$

donde S representa el producto de todos los factores de N excepto 2. Entonces,

$$N + 2 = 2S + 2 = 2(S + 1)$$

donde el último cálculo se obtiene usando la propiedad distributiva. Entonces $N + 2$ es divisible por 2 y, por consiguiente, no es un número primo.

Considera ahora el número $N + 3$. Usando las propiedades conmutativa y asociativa podemos escribir

$$N = 3(2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 101) = 3T$$

donde T representa el número del paréntesis. Entonces,

$$N + 3 = 3T + 3 = 3(T + 1)$$

Aquí nuevamente hemos aplicado la propiedad distributiva. Esto muestra que $N + 3$ tiene un factor 3 y entonces no es primo. De la misma manera podemos mostrar que $N + 4$ tiene el factor 4, $N + 5$ tiene el factor 5, y así sucesivamente, hasta $N + 101$ que tiene un factor 101. Entonces ninguno de los cien números

$$N + 2,\ N + 3,\ N + 4,\ \ldots,\ N + 101$$

es primo, de manera que hay un vacío de por lo menos 100 entre

primos sucesivos. Parece claro cómo se puede emplear este método para mostrar que hay vacíos tan grandes como queramos.

Después de haber considerado los vacíos grandes, examinemos los pequeños. ¿Cuál es el menor vacío posible entre dos números primos mayores que 2? Dos números primos cuya diferencia es 2 se llaman <u>primos gemelos</u>, o simplemente <u>gemelos</u>. Un número primo que pertenece a un par de este tipo se llama <u>gemelo</u>. Para tener una idea de la frecuencia con que aparecen los números primos gemelos, examina la tabla de más abajo, que compara el número de gemelos menores que el número n con el número total de números primos menores que n.

n	número de primos $< n$	número de gemelos $< n$	$\dfrac{\text{número de gemelos} < n}{\text{número de primos} < n}$
20	8	7	$\frac{7}{8} \approx 0.88$
40	12	9	$\frac{9}{12} = 0.75$
60	17	12	$\frac{12}{17} \approx 0.71$
80	22	15	$\frac{15}{22} \approx 0.68$
100	25	15	$\frac{15}{25} = 0.60$

Verifica esta tabla comprobándola mediante tu lista de números primos. ¿Parece indicar la tabla que los gemelos llegan a ser más escasos en comparación con el número de primos? Prueba aún esta conjetura completando la tabla del problema 1 de los ejercicios siguientes. Sobre la base de esta evidencia, ¿crees razonable la conjetura de que los gemelos son escasos en comparación con el número de primos? De hecho, se sabe que en cierto sentido los gemelos resultan escasos cuando continuamos la sucesión de los números primos, aunque no trataremos de proseguir con este tema aquí. ¿Hasta qué punto resultan escasos? Por ejemplo, ¿dejarán de aparecer del todo a partir de cierto momento? He aquí algo, nuevamente, que nadie sabe en matemáticas. La respuesta a esta pregunta aún no se conoce.

Como has visto, hay varias preguntas y conjeturas sugeridas referentes a los números naturales y una buena parte de ellas no han sido aún resueltas. La rama de las matemáticas que trata de estos asuntos se llama teoría de los números. Si quieres conocerla mejor, puedes leer un par de libritos que sobre este tema ha publicado el SMSG con el título de Ensayos sobre la teoría de los números. Puedes encontrar muchas más referencias en la Guía para el estudio de la teoría de los números, publicada también por el SMSG.

En los ejercicios que siguen se sugieren algunas otras ideas y conjeturas dentro del dominio de la teoría de los números.

Ejercicios 13-3

1. Completa la siguiente tabla:

n	número de primos < n	número de gemelos < n	$\frac{\text{número de gemelos} < n}{\text{número de primos} < n}$
100	25	15	$\frac{15}{25} = 0.60$
200	46	29	$\frac{29}{46} \approx 0.63$
300	62	37	
400	78	41	
500	95	47	
600			
700			
800			
900			
1,000			

2. Para cada fila de la tabla del problema 1 calcula el producto de los números de las columnas primera y tercera dividido por

el cuadrado del número de la segunda columna. Para la primera fila calcula $\frac{(100)(15)}{25^2}$, para la segunda $\frac{(200)(29)}{46^2}$, y así sucesivamente. ¿Te sugieren una conjetura esos resultados?

3. Completa la tabla siguiente que muestra el número de números primos que existe entre cuadrados perfectos sucesivos.

Intervalo	Número de números primos
1 - 4	2
4 - 9	2
9 - 16	2
16 - 25	
25 - 36	
36 - 49	
continúala hasta	
225 - 256	

Por ejemplo, hay 2 primos entre 9 y 16 (¿cuáles son?), de manera que hemos escrito un 2 en la tercera fila de la segunda columna. ¿Te sugiere esto una conjetura? Realmente no se sabe aún si hay siempre un número primo entre dos cuadrados consecutivos. He aquí otro ejemplo de lo que nadie sabe en matemáticas.

4. Puedes clasificar los números impares de acuerdo con sus restos cuando se dividen por 4. Por ejemplo, 5, 13 y 17 tienen resto 1 mientras 3, 7 y 11 tienen resto 3. Si el resto es 1, el número puede ser escrito en la forma $4k + 1$ para cierto número k. Si el resto es 3, puede ser escrito en la forma $4k + 3$. Haz una lista de tus resultados completando la siguiente tabla:

n	número de primos menores que n, de la forma 4k + 1	número de primos menores que n, de la forma 4k + 3
10	1	2
20	3	4
30	4	5
40		
50		
60		
70		
80		
90		
100		

¿Qué conjetura te sugiere esta tabla? Ensaya tu conjetura continuando la tabla hasta 200. ¿Prueba esto que la conjetura es cierta?

*5. Si examinas la lista de números primos, observarás un caso en el cual tres números impares consecutivos son primos. ¿Cuáles son esos números? ¿Conoces algún otro ejemplo de esto? ¿Sospechas que esto no vuelve a ocurrir? Trata de mostrar que esta conjetura es correcta mostrando que de tres números impares consecutivos, uno de ellos es siempre divisible por 3. El número divisible por 3 no puede ser número primo salvo cuando es igual a 3. Entonces, pueden aparecer tres primos impares consecutivos solamente en el caso de 3, 5 y 7, que ya se han encontrado.

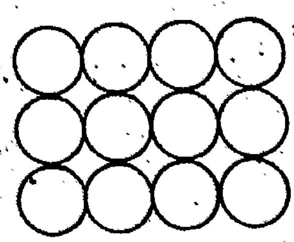
13-4. Problemas sobre esferas

Vamos ahora a ver un problema en otro campo. Todo el que alguna vez ha sostenido en la tienda una bolsa bajo la boquilla de un molinillo de café, sabe que cuando termina la molienda la bolsa parece llena; pero que, sacudiéndola, el café se asienta considerablemente. La vibración hace que las partículas de café se aprieten entre sí y ocupen menor volumen. Esta experiencia sugiere

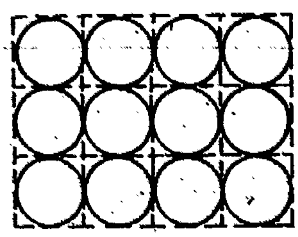
el siguiente problema de empaquetamiento, que tiene varias aplicaciones importantes. Supón que tienes un gran número de bolitas perfectamente esféricas, hechas de vidrio, mármol o cualquier otra sustancia dura, y que te propones embalarlas en un barril. ¿Cómo debes meter las bolitas en el barril de manera que quepa el mayor número posible de ellas? Imaginemos que el barril es tan grande en comparación con las bolitas que su dimensión exacta no tiene importancia y lo que estamos preguntando es "¿cómo embalar las bolitas de manera que se tenga el mayor número posible de ellas por pie cúbico?"

Quizá deberíamos comenzar con el correspondiente problema en el plano. Si quieres guardar cierto número de discos circulares idénticos, por ejemplo monedas, ¿cómo puedes disponerlos sobre el plano sin que se superpongan, de manera que obtengas el mayor número posible dentro de la región plana dada, digamos un rectángulo grande? Para mayor facilidad, supón que el diámetro de las monedas se toma como unidad de distancia.

Una manera de arreglar las monedas sería la siguiente:

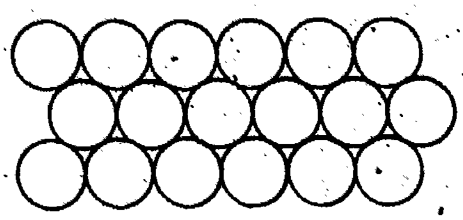


en la cual cada moneda, excepto las de los bordes, toca a otras cuatro. Realmente esto conduce a imaginar cada circunferencia como inscrita en un cuadrado de lado unitario, tal como , habiendo luego acomodado los cuadrados entre sí de manera que sus interiores llenen la región plana.

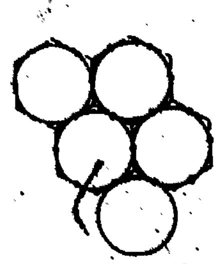


¿Cuál es el área del interior de cada cuadrado? ¿Cuál es el área de cada disco? Muestra que la razón del área del disco a la del cuadrado es $\frac{\pi}{4}$. Muestra que esto es aproximadamente 0.785, de manera que cada disco cubre un 78.5% de la región cuadrada correspondiente. Como los cuadrados se disponen entre sí sin superponerse para cubrir el plano, esto significa que los discos de esta disposición cubren un 78.5% de la región plana; es decir, un 21.5% queda sin cubrir.

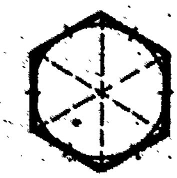
¿Puedes imaginar una mejor manera de colocar las monedas? Probablemente ya se te ha ocurrido como buena posibilidad la siguiente disposición:



En esa disposición, ¿a cuántos discos toca cada disco interior? Es como si uno se imaginara que cada disco ha sido inscrito en un hexágono regular y que los hexágonos se han dispuesto como se muestra con línea de trazos en la siguiente figura:



Se puede imaginar que un hexágono está compuesto por seis triángulos equiláteros, como se ilustra en la primera figura de la página siguiente. La altura de cada triángulo tiene una longitud igual al radio, que es $\frac{1}{2}$. Muestra que el interior de cada hexágono tiene un área de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ unidades cuadradas. (La longitud de un lado opuesto a un ángulo de $30°$ en un triángulo rectángulo es igual a la longitud del lado adyacente al ángulo, dividida por $\sqrt{3}$.)



Como el área del disco es $\frac{\pi}{4}$, la razón del área del disco a la del interior del hexágono es

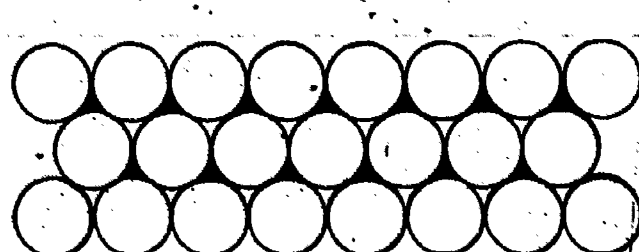
$$\frac{\pi}{4} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{4}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

Muestra que esto es aproximadamente 0.907, lo cual indica que el disco cubre 90.7% del hexágono. Como hemos visto que los hexágonos se disponen uno al lado de otro para cubrir una región plana sin superponerse, en esta disposición queda cubierto con los discos un 90.7% de la región plana. Este resultado es mejor que el anterior.

¿Puedes imaginar una manera mejor de disponer las monedas? En realidad se puede demostrar que la disposición anterior es la mejor de todas, aunque no lo haremos ahora.

Volvamos al problema de embalar las bolitas en el barril. ¿Sospechas cuál es la mejor manera de embalarlas? Antes de proseguir, experimenta con algunas bolitas y ve si puedes establecer una hipótesis sobre el mejor embalaje.

Un procedimiento posible sería comenzar poniendo una capa de bolitas cuyos centros estén todos en un plano paralelo al fondo, es decir, una capa sobre el fondo de la caja o barril que se desea llenar. Desde arriba, esto se vería exactamente como si se cubriera una región plana con círculos, y en vista de nuestra observación anterior sobre los círculos, parecería que deberíamos disponer nuestras esferas de la misma manera, como se muestra a continuación:



Ahora parece plausible que tratemos de construir una segunda capa de bolitas. ¿Piensas que sería una buena idea colocar esta capa de bolitas de manera que cada bolita esté directamente encima de una de la primera capa? No, parece que obtendríamos mejor embalaje tratando de colocar las bolitas de la segunda capa sobre los "huecos" de la primera. En realidad no hay espacio suficiente para poner una bolita en <u>cada</u> hueco, pero podemos poner una capa sobre la mitad de los huecos, digamos los que aparecen sombreados en la figura anterior. Entonces se puede colocar una tercera capa sobre la segunda, cubriendo la mitad de los huecos de la segunda capa. Esto puede hacerse de dos maneras, dependiendo de qué conjunto de "huecos" tratamos de llenar. Las esferas de la tercera capa se pueden colocar exactamente encima de las de la primera o en los "huecos" no sombreados de la primera capa.

Esta parece ser una conjetura razonable sobre el mejor embalaje posible. Se puede mostrar para este método de embalaje que la razón del volumen de las bolitas al de la región es $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.7405$, de manera que las bolitas llenan un 74% del espacio. Nadie sabe aún si éste es realmente el mejor embalaje o no. El mejor resultado conocido hasta ahora lo obtuvo en 1947 un matemático británico, Rankin, quien mostró que no hay embalaje posible en el cual las esferas llenen más del 82.8% del volumen del espacio.

Si te sientes seguro de que conoces la respuesta correcta a este problema, aunque no puedas probarla, considera el problema de empaquetar una mezcla de bolitas de diferentes tamaños. Por ejemplo, puedes tener algunas ~~bol~~itas de un diámetro de dos pulgadas y otras de un diámetro de una pulgada. Supón que quieres embalar un barril de manera que en el total de bolitas que contiene, el número de bolitas de una pulgada sea el triple del número de bolitas de dos pulgadas. ¿Cómo puedes intentarlo de la mejor manera posible? Hasta ahora nadie tiene siquiera una buena idea acerca de cómo encarar este problema.

Los problemas que hemos tratado son teóricos y el matemático se interesa en ellos por ellos mismos, pero también tienen aplicaciones. En los materiales aislantes, debe haber espacios en la forma de "bolsillos" de aire pequeños pero que no sean tan grandes

que permitan la circulación. Una manera de simplificar este problema es considerar el embalaje de pequeñas esferas entre dos capas de material compacto. En algunos casos debe tenerse en cuenta el área superficial de las esferas tanto como las propiedades físicas de los materiales mismos. En el diseño y en la prueba de plásticos aparecen problemas de este tipo.

Ejercicios 13-4

1. Toma el diámetro de una moneda de un centavo como unidad de longitud. Dibuja un cuadrado de 8 unidades de lado (área = 64 unidades cuadradas). Trata de disponer monedas de un centavo de manera que quepa el mayor número posible de ellas en la región. ¿Cuántas entrarán? Halla la razón del área total de los círculos al área total de la región. ¿Cómo se compara esto con el resultado teórico de 0.907 antes obtenido? Toma una región cuadrada de 14 unidades de lado (área = 196 unidades cuadradas) y ensaya nuevamente el experimento. Cuanto más grande sea la región, mayor deberá ser la aproximación al resultado teórico.
2. Imagínate un conjunto de discos, de los cuales cada uno tiene diámetro 1, y trata de poner el mayor número posible de ellos en una región cuya área es 1,000 unidades cuadradas. Utilizando el resultado según el cual lo más que se puede cubrir es 90.7% de la región, ¿cuál es el mayor número de discos que se podría poner dentro?
3. Toma una caja de tamaño conveniente, por ejemplo una caja de tizas, y una colección de bolitas de un mismo tamaño. Ve cuántas puedes poner dentro de la caja. Cuenta el número. Halla la razón del volumen total de las bolitas al volumen de la caja y compáralo con el 0.74 que hemos anotado anteriormente.
4. Cuando se embalan las esferas de la manera que hemos mencionado en esta sección, ¿a cuántas esferas toca cada esfera interior?

13-5. Un problema sobre el coloreado de mapas

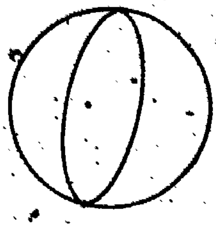
Supón que tenemos un mapa y una caja de lápices de colores. Queremos colorear el mapa. A fin de distinguir claramente los diferentes países, cuando dos de ellos están juntos

a lo largo de un arco de curva, debemos pintarlos de diferente color.

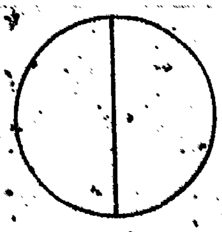
Si sus fronteras tienen un solo punto en común, podemos pintar los países de un mismo color.

Al colorear un mapa convendremos también en colorear la región exterior; puedes imaginar que se trata de un océano que circunda los países, si así lo prefieres.

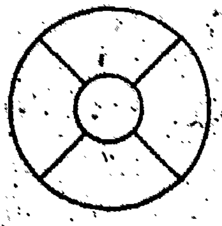
Es razonable preguntar cuántos colores diferentes se necesitan para colorear un mapa. ¿Cuál sería el menor número de colores necesarios para el siguiente mapa?



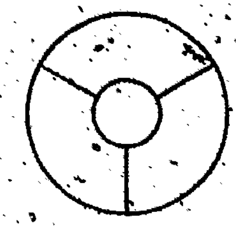
¿Cuál para este otro mapa?



¿Puedes colorear el mapa que sigue con menos de cuatro colores?



¿Y este otro mapa?



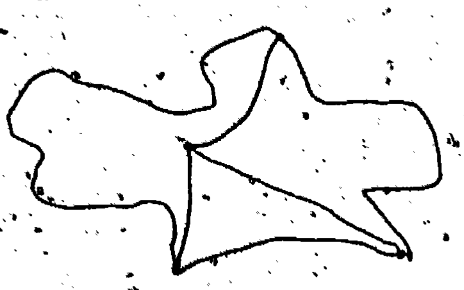
¿Por qué no puedes arreglártelas con menos de cuatro colores en este caso? Observa el país del centro y los tres que lo rodean. ¿Es cierto que cada uno de esos países tiene un arco de frontera común con cada uno de los otros? ¿Pueden pintarse dos cualesquiera de ellos con el mismo color? ¿Muestra esto por qué necesitas por lo menos cuatro colores?

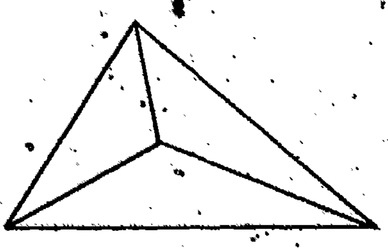
¿Puedes imaginar un mapa que necesite cinco colores? Naturalmente, para dibujar un mapa en el que haya cinco países, cada uno de los cuales tenga un arco de frontera común con todos los demás, necesitarías cinco colores, así como el último mapa ha necesitado cuatro colores. Trata de obtener tal mapa. ¿Has tenido buen éxito? En realidad no es difícil darse cuenta de que no es posible tener cinco regiones de manera que cada una limite con las otras cuatro. Esto no demuestra, sin embargo, que no haya mapas que requieran cinco colores. ¿Piensas que hay mapas que necesitan cinco colores?

En cierto sentido tu conjetura acerca de la respuesta a esta pregunta es tan buena como cualquier otra, pues la respuesta aún no se conoce. Hay una leyenda (de muy dudosa autenticidad) según la cual un fabricante de mapas propuso esta cuestión hace unos 100 años al matemático británico Cayley. En todo caso, el problema del coloreado de un mapa es ahora uno de los problemas clásicos no

resueltos de las matemáticas. En 1897 el matemático británico Heawood, mostró que todo mapa puede ser coloreado con cinco colores, de manera que en ningún caso se necesita más de cinco colores. En 1941 el matemático norteamericano Franklin, demostró que todo mapa con menos de 38 países podía ser pintado con cuatro colores. Entonces, si buscas un mapa que realmente necesite cinco colores, resultará complicado, pues debe tener por lo menos 38 regiones.

Hay un aspecto muy interesante de este problema. Si consideramos un mapa cualquiera, el número de colores necesarios no depende, por supuesto, de la forma particular de los arcos en la frontera. En efecto, si imaginamos el mapa dibujado en una lámina de caucho, podemos deformar esta lámina de modo continuo de todas las maneras posibles sin cambiar el problema de los colores. Entonces, por ejemplo, los dos mapas siguientes pueden considerarse uno mismo, pues uno cualquiera de ellos puede siempre deformarse hasta adoptar la forma del otro.



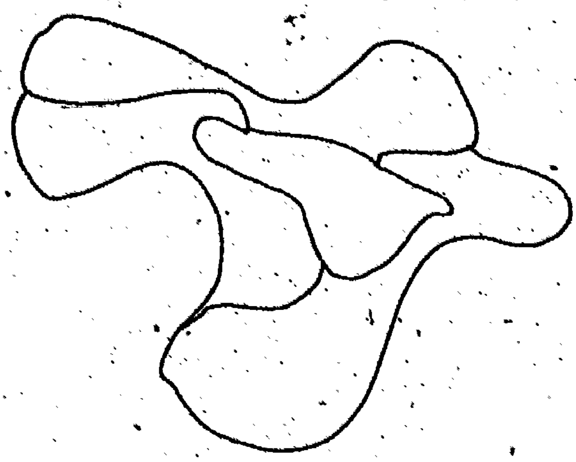


A esto se alude cuando se dice que el problema es topológico. Es decir, su solución no cambia si la figura sufre una deformación continua. Este hecho permite siempre imaginar que un mapa ha sido deformado de tal manera que todos los arcos se han convertido en reuniones de segmentos de recta. Esto significa que basta considerar los mapas en los cuales las regiones son polígonos (triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc.), como se hace en la mayor parte de los ejemplos que siguen.

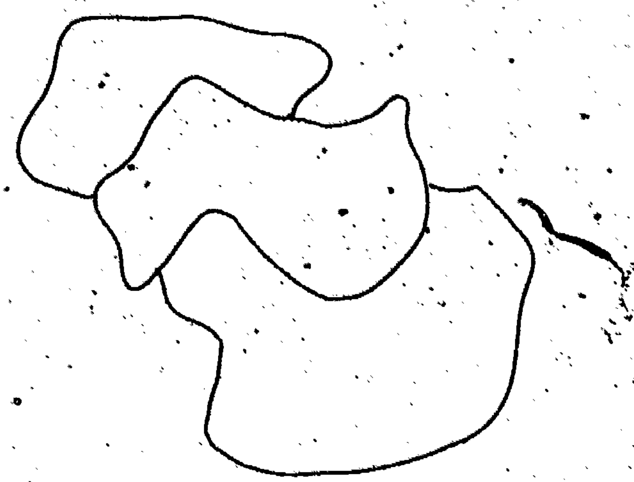
Ejercicios 13-5a

1. Dibuja un mapa poligonal que sea equivalente a cada uno de los mapas dados a continuación (es decir, que se pueda obtener por deformación continua de estos mapas).

(a)

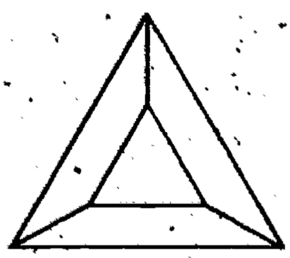


(b)

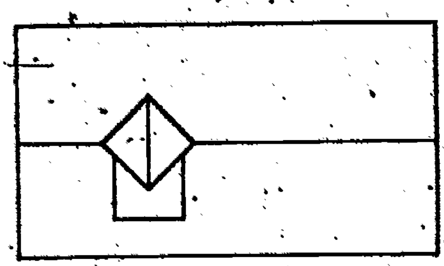


2. Pinta con el menor número posible de colores cada uno de los siguientes mapas:

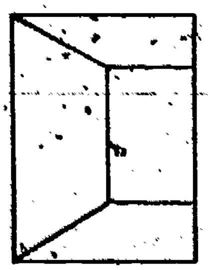
(a)



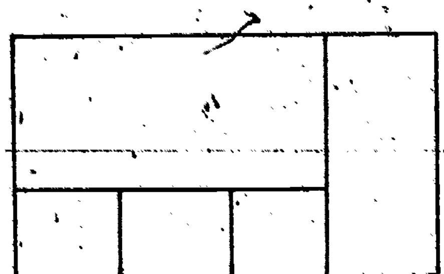
(b)



(c)

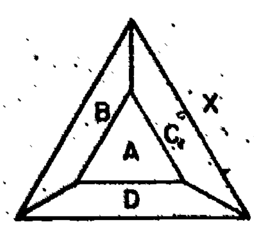


(d)



3. Supón que tenemos dos islas rodeadas por un océano. Una isla se divide en países, como se muestra en la figura del problema 2(a), y la otra, como se muestra en la figura del problema 2(b). Pinta este mapa con cuatro colores.
4. Supón que tienes un océano con dos islas, cada una dividida en países, y supón que sabes cómo pintar cada isla y el océano que la rodea con cuatro colores. Muestra cómo puedes pintar el mapa combinado con cuatro colores.

Una cuestión interesante relacionada con el coloreado de mapas es la siguiente: Supón que tienes un número fijo dado de lápices de colores en tu caja de lápices. ¿De cuántas maneras diferentes puedes colorear un mapa dado? Naturalmente, si no tienes suficientes colores, la respuesta es cero. Como ilustración, mira el mapa de la figura del problema 2(a) y supón que hay cinco colores en tu caja. Los esquemas de coloreado para este mapa se muestran a continuación, donde las regiones marcadas A, B, C y D deben ser todas de diferentes colores, mientras la región marcada X puede



ser de cualquier color excepto los que se usan para B, C y D. ¿Por qué son esos todos los esquemas? Observa que X puede ser del mismo color que A o de cualquier otro color no usado anteriormente.

En este esquema tienes cinco colores posibles con que pintar la región marcada con A. Una vez que hayas escogido un color para A, ¿de cuántas maneras diferentes puedes elegir un color para la región marcada con B? ¿De cuántas maneras diferentes puedes pintar las regiones marcadas con A y con B? Claramente hay $5 \times 4 = 20$ maneras. Por ejemplo, si los cinco colores dados son rojo, verde, amarillo, azul y blanco, los veinte pares posibles de colores para las regiones marcadas A y B serán:

rojo-verde	rojo-amarillo	rojo-azul	rojo-blanco
verde-rojo	verde-amarillo	verde-azul	verde-blanco
amarillo-rojo	amarillo-verde	amarillo-azul	amarillo-blanco
azul-rojo	azul-verde	azul-amarillo	azul-blanco
blanco-rojo	blanco-verde	blanco-amarillo	blanco-azul

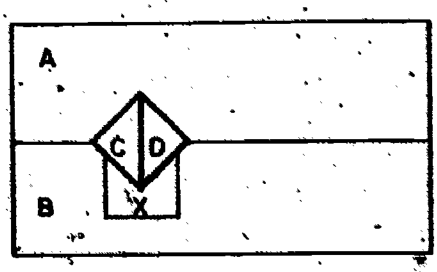
Si tienes dudas sobre este razonamiento, revisa el Capítulo 7 donde resolviste problemas de esta clase. Para cada una de estas 5×4 combinaciones de colores tienes aún 3 posibles colores para la región marcada C y luego 2 colores posibles para la región marcada D. Finalmente, como la región X puede ser de cualquier color excepto los que se usaron para B, C y D, hay $5 - 3$ ó 2 posibles elecciones de color para X. El número total de maneras de colorear el mapa 2(a) con cinco colores a lo más, es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 240$ maneras.

Los siguientes problemas, que son una continuación de los Ejercicios 13-5a, se refieren al número de maneras de colorear un mapa.

Ejercicios 13-5a (continuación)

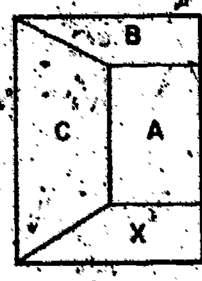
5. (a) Muestra que los diferentes esquemas de posibles coloreados para el mapa 2(b) se pueden describir así:

Y.



donde las regiones marcadas A, B, C y D deben tener distintos colores; la región X puede pintarse de cualquier color salvo los que se usaron para B, C y D; y finalmente, la región Y puede tener cualquier color distinto de los de A o B.

(b) Muestra que los diferentes esquemas posibles de coloreado para el mapa 2(c) se pueden describir así:



donde los colores para las regiones A, B, C y D deben ser distintos, pero X puede tener cualquier color, excepto los de A, C o D.

(c) Muestra que los diferentes esquemas posibles de coloreado para el mapa 2(d) pueden describirse así:

donde las regiones marcadas A, B, C y D deben tener diferentes colores; X puede ser pintado de cualquier color distinto de los colores de A, C y D; y finalmente, Y puede tener cualquier color diferente de los colores de A, X y D.

6. Utiliza los resultados del problema 5 y el método presentado anteriormente para verificar y completar la siguiente tabla referente al número de maneras de pintar los diferentes mapas con n colores para ciertos valores de n.

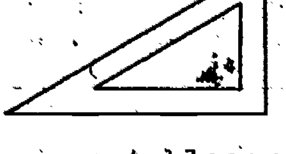
n	mapa 2(a)	mapa 2(b)	mapa 2(c)	mapa 2(d)
3	0	0	0	
4	24	48	24	
5	240	720		480
6	1,080	4,320		

7. En el mapa 2(a), si tenemos n colores disponibles, hay n maneras posibles de elegir un color para la región A, luego $(n - 1)$ maneras de elegir un color para B, $(n - 2)$ para C,

$(n - 3)$ para D y finalmente $(n - 3)$ para X, pues X puede tener cualquier color diferente del de B, C y D. El número total de maneras de pintar 2(a) con n colores es, por consiguiente, $n(n - 1)(n - 3)^2$. Verifica que esto da resultados correctos para $n = 3, 4, 5$ ó 6 comparando con el problema 6.

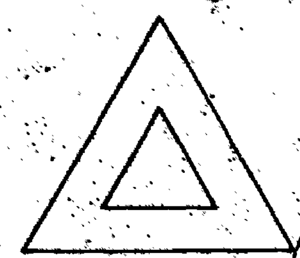
8. Haz uso del método del último problema para obtener fórmulas que den el número de maneras de pintar cada uno de los mapas 2(b), 2(c) y 2(d) con n colores.

Anteriormente hemos hecho notar que en lo que se refiere al problema de colorear mapas, cualquier mapa puede ser reemplazado por un mapa poligonal (es decir, un mapa en el cual todas las fronteras son reuniones de segmentos de recta). Luego, si cualquier mapa poligonal puede ser pintado con cierto número de colores, entonces todo mapa puede ser pintado con el mismo número de colores. También hemos mencionado que un matemático llamado Heawood, ya ha demostrado que se puede pintar todo mapa poligonal (y por consiguiente todo mapa) con cinco colores. Ahora bien, es claro que para demostrar un resultado que se aplica a todos los mapas es necesario conocer algunas propiedades que valgan para todos los mapas. No trataremos de rehacer aquí la demostración de Heawood, pero nos parece interesante descubrir una ley general sobre los mapas poligonales que fue una de las ideas más importantes de Heawood. Esta ley se aplica a todos los mapas poligonales sin islas (esto es, mapas para los cuales las fronteras son conexas, es decir de una sola pieza). Por ejemplo, la figura dada a continuación tiene una isla y no se la considera.



La propiedad que vamos a establecer fue descubierta por Euler hace unos 200 años. En realidad, la había encontrado cien años antes el gran matemático francés Descartes, pero tan poca gente leyó las obras de Descartes que cuando Euler descubrió la

propiedad nuevamente, todo el mundo pensó que era nueva. A pesar de esto, se le sigue llamando fórmula de Euler.



Considera la figura 2(a) de los Ejercicios 13-5a. ¿Cuántos vértices ves en este mapa? ¿Cuántos países o regiones hay? (No te olvides de contar la región exterior.) ¿Cuántas aristas o segmentos hay en la frontera? ¿Coinciden tus respuestas con las cifras de la primera columna de la siguiente tabla? Las letras V, C y A se usan para representar los números de vértices, de regiones o países y de aristas.

	mapa 2(a)	mapa 2(b)	mapa 2(c)	mapa 2(d)
V	6			
C	5			
A	9			

Ejercicios 13-5b

1. Examina los mapas 2(b), 2(c) y 2(d) de los Ejercicios 13-5a y completa la tabla anterior.
2. Dibuja por lo menos cinco mapas poligonales sin islas. Cuenta los vértices, aristas y regiones, y forma una tabla [illegible] la anterior.
3. Examina las tablas que has hecho y mira si puedes lograr una relación entre V, C y A que valga para todos los mapas que has dibujado. ¿Puedes enunciar una conjetura referente a una relación que sea válida para todos los mapas poligonales sin islas?
4. Dibuja cinco mapas poligonales, sin islas, y comprueba tu conjetura en ellos.

5. Compara tus resultados con los de tus condiscípulos. ¿Qué relación entre V, C y A aparece como verdadera en tu conjetura sobre todos los mapas de la clase que hemos estudiado?

Nota que la observación anterior no prueba la fórmula de Euler. La demostración está aún por hacer, pero es de mucha ayuda el tener por lo menos una buena sospecha de lo que se quiere demostrar.

En la Sección 10-8 estudiamos la fórmula de Euler para superficies simples. En este capítulo hemos tratado la fórmula como si se refiriera a caminos poligonales planos, mientras que en el Capítulo 10 estudiamos superficies. En muchos aspectos estos temas son equivalentes.

13-6. El viajante

Los primeros problemas estudiados en este capítulo, a saber, los relativos a números primos, podrían clasificarse como problemas de matemáticas puras. Esto, a pesar de que hemos visto que las propiedades de los números primos se emplean frecuentemente en las aplicaciones actuales al cálculo numérico. Tampoco los problemas del embalaje de esferas y del coloreado de mapas dejan de tener utilidad y aplicaciones.

En este sección consideraremos un problema que parece muy práctico y es muy importante por sus aplicaciones. Es el llamado "problema del viajante". Aunque en realidad este problema no preocupa mucho a los viajantes, su esencia puede describirse muy fácilmente en términos de un viajante, y los matemáticos han llegado a bautizar el problema por este nombre. En las aplicaciones reales, "viajante" puede reemplazarse por "aeroplano", mientras que "ciudad" puede ser reemplazada por "base"; otros sustitutos podrían ser "camión" y "factoría", respectivamente.

Supongamos que eres un viajante con la oficina principal en la ciudad A. Estás obligado a visitar mensualmente a los clientes de las ciudades B, C y D, y regresar a tu oficina principal. Tu problema es disponer ese viaje lo más eficientemente posible (es

decir, hacer que la distancia recorrida sea mínima). En apariencia este problema es muy simple. Todo lo que necesitas es considerar los caminos posibles, sumar las distancias y ver cuál es menor. Veamos cuántas rutas hay. ¿Cuántas maneras hay de elegir la primera estación después de partir de la sede principal? Naturalmente 3, pues hay 3 ciudades para visitar. Después de visitar la primera ciudad, ¿cuántas posibilidades hay para la segunda estación? Puedes hallar el número total de rutas posibles? Debes encontrar $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ rutas. En realidad, escribiendo las ciudades en el orden en que se visitan, podemos hacerlo del siguiente modo:

ABCDA	ADCBA
ABDCA	ACDBA
ACBDA	ADBCA

El problema es bastante simple, pues las dos rutas escritas en cada fila son en realidad la misma ruta con direcciones opuestas y tienen, por tanto, la misma longitud; sólo se necesita, pues, hallar las longitudes totales de tres rutas y tomar la menor. El problema 1 de los Ejercicios 13-6 es un ejemplo de esta situación.

Pero supón que tu zona de venta se agranda y que debes visitar 8 ciudades. Ahora, ¿cuántas rutas posibles hay? Con un argumento análogo al anterior se ve que hay $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ rutas ó 40,320 rutas posibles. Aun si divides este número por 2, pues has contado cada ruta dos veces (una en cada dirección), tenemos todavía 20,160 rutas diferentes, cuya longitud tienes que verificar. ¡Qué tarea!

En 1954, Dantzig, Fulkerson y Johnson estudiaron el problema del viajante para un hombre cuya base fuera Wáshington, D.C., y que tuviera que visitar las 48 capitales de los estados (en esa época Hawáii y Alaska todavía no lo eran). El número de rutas posibles se obtiene, naturalmente, mediante el mismo razonamiento

$$48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Este es un número que, expresado en la notación de base 10 habitual, tiene 61 dígitos, resultando un problema de cálculo que está fuera del alcance aun de las mejores calculadoras de gran velocidad.

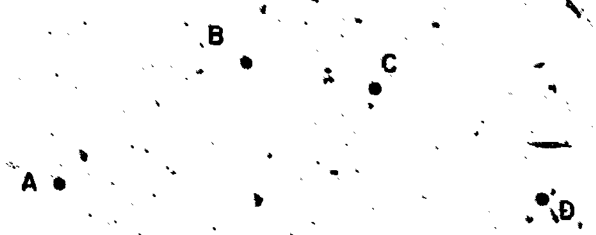
La razón para la dificultad está clara. Al resolver este problema hay un número definido de casos a considerar, pero el número es tan grande que se vuelve materialmente imposible tratar con esos casos uno por uno, salvo en situaciones particulares muy simples. El método usado por Dantzig, Fulkerson y Johnson incluye una gran parte de trabajo para las calculadoras de gran velocidad. Aún no se ha encontrado un buen método general para resolver los problemas de esta clase en un período de tiempo razonable.

Quizás al trabajar con este problema no deberíamos pretender tanto. Quizá no deberíamos insistir en el resultado óptimo, sino buscar un método que tenga una alta probabilidad de aproximarse a la mejor respuesta. Si logras cualquier buena idea sobre este asunto, seguramente habrá un gran número de industrias y de oficinas estatales que se interesarán mucho en ella.

Los problemas de esta clase no solamente son interesantes por sí mismos, sino que a ellos conduce un buen número de problemas prácticos referentes a transportes, programación de operaciones de fabricación y diseño de redes de comunicaciones. En los problemas siguientes se sugieren unos pocos ejemplos más. Un libro muy accesible sobre problemas análogos a éstos es The compleat strategyst de Williams. Probablemente lo encontrarás muy interesante.

Ejercicios 13-6

1. Este diagrama representa cuatro ciudades.



Supón que las distancias en millas entre diferentes pares de ciudades son $d(AB) = 200$, $d(AC) = 300$, $d(AD) = 400$, $d(BC) = 150$, $d(BD) = 250$ y $d(CD) = 180$. Resuelve el problema del viajante para este caso, determinando la ruta más corta que parte del punto A y llega al mismo punto, pasando por todas las otras ciudades.

2. Podría ocurrir que en el problema del viajante fuera más importante hacer mínimo el tiempo del viaje, en vez de hacer mínima la distancia. Además, debido a que hay que hacer conexiones entre aeroplanos o autobuses, el tiempo que se necesita para ir de A a B puede no ser el mismo que el que se necesita para ir de B a A. Supongamos que en el problema 1 los tiempos de viaje en horas son $t(AB) = 3$, $t(BA) = 2$, $t(AC) =$ [illegible], $t(CA) = 4$, $t(AD) = 5$, $t(DA) = 7$, $t(BC) = 1$, $t(CB) = 2$, $t(BD) = 2$, $t(DB) = 4$, $t(CD) = 3$, $t(DC) = 1$. Busca la ruta del viajante que dé el tiempo mínimo.
3. Si hay 10 ciudades, ¿cuántas rutas comienzan y terminan en una ciudad dada?
4. (a) En el cuadrado siguiente, ¿cuántos conjuntos de tres números pueden escogerse sin tomar dos de una misma fila o columna?

9	3	6
4	8	2
5	7	1

   (b) ¿Cuál o cuáles de estas ternas tienen su suma máxima?
5. Resuelve el problema correspondiente al problema 4 para el siguiente cuadrado:

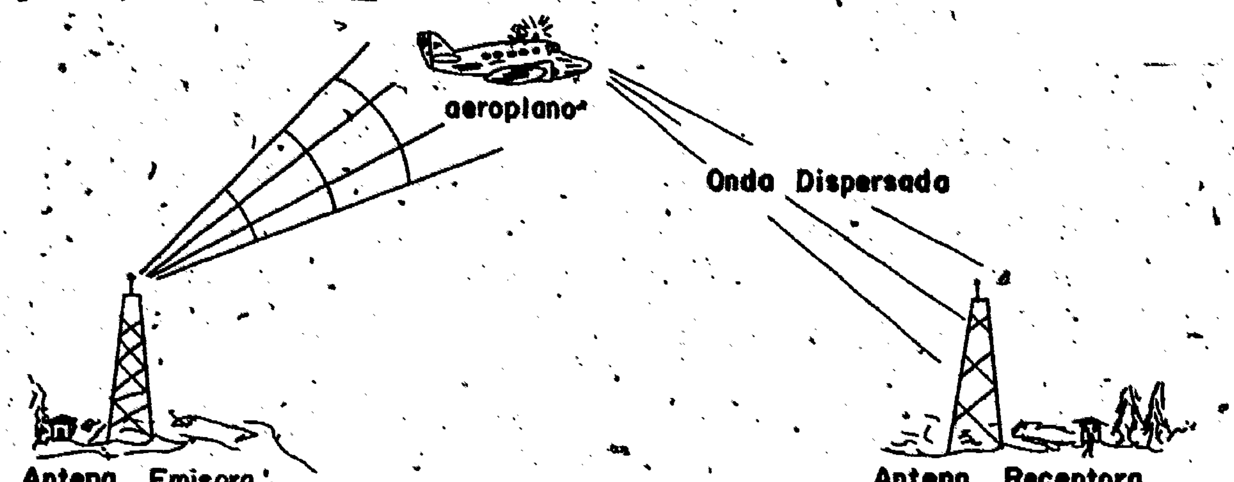
1	9	6	14
7	15	2	10
3	11	8	16
5	13	4	12

13-7. Problemas de física aplicada

Algunos de los más interesantes y también de los más importantes problemas no resueltos en matemáticas se relacionan con problemas de física, tales como propulsión de cohetes, movimiento de aeroplanos y comportamiento de ondas electromagnéticas. Para apreciar realmente la mayor parte de estos problemas en ciencia y en ingeniería, necesitas conocer algunos temas tanto de matemáticas

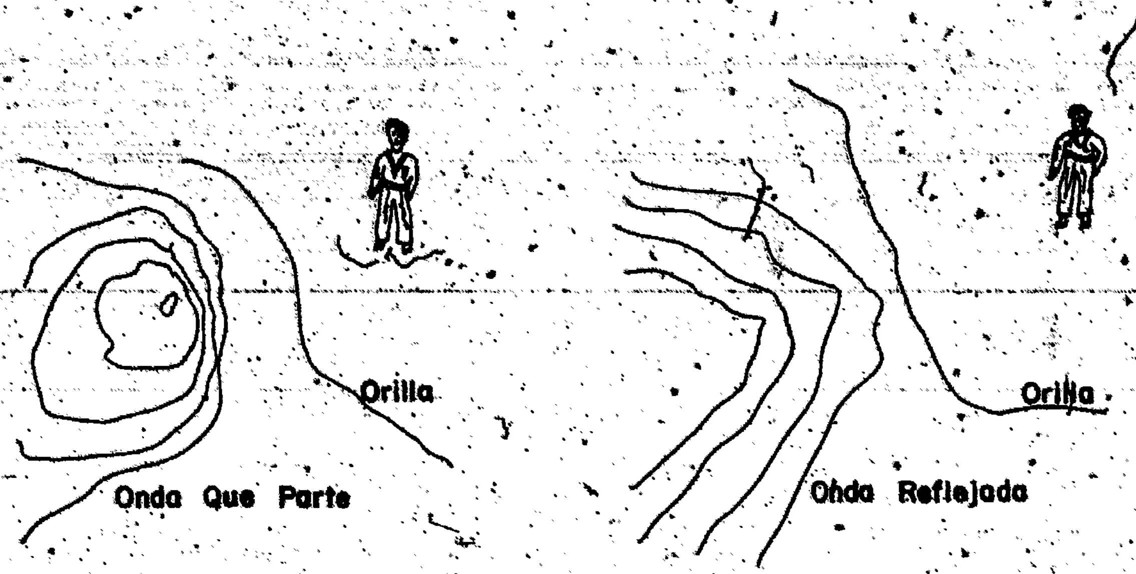
como de ciencia, que aún no has estudiado. Sin embargo, tal vez podemos indicarte el significado de uno o dos de estos problemas.

Considera, por ejemplo, el problema fundamental del radar. Desde una antena enviamos una onda electromagnética, que se refleja en un obstáculo y se dispersa, siendo luego captada por una antena receptora; esto produce una señal en la pantalla del radar.



Si se conoce la forma del obstáculo, en este caso un aeroplano, los matemáticos saben bastante bien cómo imaginar la forma de la onda dispersada. Desgraciadamente no se sabe cómo encontrar la forma del obstáculo con sólo examinar la onda dispersada. Entonces, con sólo mirar la pantalla no podemos saber qué clase de objeto produce la señal. Puedes imaginarte por qué sería muy útil si pudiéramos saberlo.

El problema es parecido al siguiente: Supón que estás de pie a la orilla del mar, en medio de una niebla densa. En alguna otra parte hay un objeto, quizás un barco, oculto por la niebla. Tomas un gran trozo de roca y lo tiras al agua, lo cual produce ondas. Poco tiempo después, ves volver las ondas que se han reflejado en el obstáculo invisible. Querrías saber entonces, con sólo mirar las ondas reflejadas, si el objeto que está en el agua es un bote de remos, un lanchón o el Queen Mary.



Otros problemas interesantes se refieren al flujo del aire alrededor de un aeroplano, y a cómo diseñar un aeroplano con características de vuelo útiles.

He aquí otros ejemplos de problemas no resueltos en matemáticas aplicadas:

1. ¿Es el sistema solar estable? Es decir, ¿se moverán los planetas indefinidamente alrededor del sol en órbitas aproximadamente iguales a las presentes o se dispersarán finalmente en el espacio, o caerán sobre el sol? O, más modestamente, ¿qué pasará con los satélites puestos en órbita?
2. ¿Qué especies de animales sobrevivirán y cuáles desaparecerán? ¿Podemos desarrollar una teoría cuantitativa de la evolución biológica?
3. ¿Cómo podemos diseñar una calculadora para un trabajo específico usando el número mínimo de componentes de tipos dados? ¿Puede ponerse en forma de programa de instrucciones para las calculadoras existentes un procedimiento que resuelva este problema, de manera que podamos utilizar las calculadoras existentes para diseñar otros mejores?
4. ¿Cómo puede afectar al crecimiento y distribución de la población y de la industria, en el futuro, una distribución dada de facilidades de transporte (carreteras, ferrocarriles, aerovías, etc.)?

13-8. Conclusión.

En 1900 se celebró en París un congreso internacional de matemáticos. Uno de los más grandes matemáticos de nuestro siglo, un alemán llamado David Hilbert (1860-1943), dio una conferencia en la que enumeró 23 problemas no resueltos cuya solución consideraba como la más importante para el progreso de las matemáticas en el siguiente siglo. Naturalmente, durante los últimos sesenta años se han formulado un gran número de otros problemas importantes. Pero aún hoy, una de las maneras más rápidas para que un joven matemático se haga famoso es resolver uno de los problemas de Hilbert. La comprensión de muchos de esos problemas requiere matemáticas avanzadas; pero uno, por ejemplo, trata de propiedades fácilmente comprensibles, de los decimales. Sabemos que todo número real tiene una representación decimal. El número $\sqrt{2}$ en particular tiene una representación tal,

$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$$

y sabemos cómo calcular cualquier número de dígitos en este desarrollo. Sabemos que el desarrollo decimal no termina y que no es periódico (consulta el Capítulo 6), pero más allá de esto no sabemos casi nada sobre este número. Por ejemplo, ¿hay infinitos números 1, o hay siete números 7 consecutivos en su desarrollo? Nadie lo sabe, y hasta ahora no parece haber método alguno para saberlo.

En la actualidad, más o menos la mitad de los problemas de Hilbert han sido resueltos, y este siglo tiene casi otros 40 años disponibles todavía. ¿Quién resolverá los problemas restantes de Hilbert, los nuevos problemas que han aparecido después de Hilbert y los problemas que aún no han sido propuestos, pero que aparecerán en el futuro? Nadie puede decirlo, naturalmente, pero es muy probable que la mayor parte de ellos sean resueltos por jóvenes. La mayoría de los descubrimientos en matemáticas han sido hechos por jóvenes de entre 20 y 30 años de edad. Si una persona tiene talento matemático, habitualmente lo muestra desde temprana edad. La edad media para el doctorado en matemáticas es menor que en casi todos los otros campos del conocimiento. Resulta así muy probable que los problemas mencionados en este

capítulo no sean resueltos por respetables profesores de barba gris (¿o quizá ya no hay profesores con barba?), sino por jóvenes no mucho mayores que tú.

Pero las matemáticas no son sólo para quienes hacen descubrimientos porque les gusta estudiarlas, sino que su uso se ha extendido rápidamente a campos tales como la medicina, biología, psicología, sociología y economía tanto como a los nuevos campos de las ciencias físicas. A medida que las máquinas absorben cada vez más las tareas rutinarias, la demanda de personal entrenado crece, y cada vez más ese entrenamiento está relacionado con las matemáticas. Además, un ciudadano americano que concurre hoy a los comicios debe tener un conocimiento más extenso de las matemáticas que el ciudadano americano de ayer, para ser así capaz de tomar las importantes decisiones que de él exige una democracia como la nuestra. Por una parte es vital que reconozca el papel y la importancia de los científicos y matemáticos, pero por otra debe estar suficientemente capacitado para comprender y apreciar, en cierta medida, sus puntos de vista.

De manera que, bien que estés o no entre los que hacen avanzar las matemáticas por amor a ellas, bien que tengas habilidad para aplicarlas a otros campos, ya las utilices como fuente de problemas recreativos, o porque en virtud del conocimiento que poseas de ellas te des cuenta de su papel en la civilización actual, de todos modos afectarán tu vida. Y, quién sabe, ¡puedas a tu vez contribuir a las matemáticas!

Lista de números primos menores que 1,000

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		2	3	5	7	11	13	17	18	23
1	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
2	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
3	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
4	173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
5	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
6	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
7	349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
8	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
9	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
10	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
11	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
12	659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
13	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797
14	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
15	863	877	881	883	887	907	911	919	929	937
16	941	947	953	967	971	977	983	991	997	1,009

Explicación de la tabla de números primos. Esta tabla está dispuesta de manera que es fácil extraer, por ejemplo, el 47° número primo. Para hacerlo, toma la fila que tiene el número 4 a la izquierda y la columna que tiene el número 7 arriba. Entonces ves que el 47° número primo es 211. Puede también usarse en la dirección contraria: como el número 691 está en la fila marcada con 12 y en la columna marcada con 5, el número 691 es el 125° número primo.

CLASIFICACION DE TEMAS[1]

FUNDAMENTOS, TEORIA DE LOS CONJUNTOS, LOGICA

1. Filosofía de las matemáticas y de la física
2. Fundamentos de las matemáticas, axiomática
3. Intuicionismo
4. Teoría de los conjuntos
5. Problema del continuo
6. Números transfinitos
7. Relaciones
8. Sintaxis, semántica, métodos formales en general, funciones recursivas
9. Lógica: cálculo multivalente, modal
10. Aplicaciones de la lógica

ALGEBRA

Algebra universal, diversos sistemas algebraicos

Análisis combinatorio

Algebra: elemental

Algebra lineal
1. Formas y transformaciones
2. Matrices
3. Desigualdades para matrices
4. Valores propios y vectores propios
5. Formas multilineales, formas alternadas, álgebra de Grassmann
6. Ecuaciones lineales, inversión de matrices, determinantes

Polinomios
1. Ecuaciones algebraicas, raíces
2. Funciones simétricas
3. Reducibilidad

Orden parcial, redes
1. Redes
2. Anillos y álgebras de Boole

Cuerpos, anillos
1. Cuerpos
2. Cuerpos finitos
3. Teoría de Galois
4. Valuaciones o valoraciones
5. Anillos
6. Ideales

Algebras
1. Algebras asociativas
2. Algebras no asociativas
3. Algebras de Lie
4. Algebra diferencial

Grupos y generalizaciones
1. Construcciones en la teoría de los grupos, grupos libres, extensiones
2. Grupos abelianos
3. Grupos nilpotentes y solubles
4. Grupos finitos
5. Grupos ordenados
6. Grupos de matrices, representaciones, caracteres
7. Semigrupos
8. Otras generalizaciones de los grupos
9. Aplicaciones

Algebra homológica

TEORIA DE LOS NUMEROS

Teoría de los números: general
1. Teoría de los números elemental
2. Cuadrados mágicos
3. Congruencias
4. Ecuaciones diofánticas
5. Problemas de representación
6. Divisibilidad y factorización
7. Restos potenciales y leyes de reciprocidad

[1] 1958 Indice de Mathematical reviews

8. Formas
9. Ultimo teorema de Fermat
10. Funciones de la teoría de los números
11. Números p-ádicos

Teoría de los números: analítica
1. Teoría analítica de los cuerpos de números y de los cuerpos de funciones
2. Algoritmos analíticos (función zeta, funciones L, series de Dirichlet)
3. Distribución de números primos
4. Teoría aditiva de los números, particiones
5. Equidistribución, teoría estadística de los números
6. Irracionalidad y trascendencia

Números algebraicos
1. Cuerpos de clases

Geometría de los números, aproximaciones diofánticas
1. Aproximaciones diofánticas
2. Geometría de los números

ANALISIS

Funciones de variables reales
1. Una variable real
2. Varias variables
3. Cálculo, teorema del valor medio, desigualdades
4. Derivación y tangentes
5. Funciones no derivables; derivadas generalizadas
6. Representación de funciones mediante integrales
7. Funciones casi-analíticas

Medida, integración
1. Teoría de la medida
2. Transformaciones que conservan la medida, teoremas ergódicos
3. Integral de Riemann
4. Integrales de Stieltjes y Lebesgue
5. Integrales de Denjoy y Perrón
6. Teoría abstracta de la integración, somas
7. Area, longitud
8. Integrales de productos
9. Teoría abstracta de la probabilidad

Funciones de variables complejas
1. Fundamentos
2. Funciones casi-conformes
3. Generalizaciones
4. Series de potencias
5. Ceros
6. Singularidades
7. Prolongación analítica, hiperconvergencia
8. La integral de Cauchy
9. Principios maximales, lema de Schwarz, teorema de Phragmén-Lindelöf
10. Representación conforme, general
11. Representación conforme, problemas especiales
12. Superficies de Riemann y funciones definidas sobre ellas
13. Funciones enteras
14. Funciones meromorfas
15. Distribución de valores, teoría de Nevanlinna
16. Comportamiento en la frontera
17. Funciones univalentes y p-valentes
18. Funciones acotadas, funciones con parte real positiva, etc.
19. Iteración
20. Familias normales
21. Desarrollo en serie de polinomios y funciones especiales
22. Fracciones continuas
23. Interpolación compleja y aproximación
24. Funciones de varias variables complejas

Funciones armónicas, funciones convexas
1. Funciones armónicas, teoría del potencial
2. Funciones subarmónicas
3. Funciones biarmónicas y poliarmónicas
4. Potenciales generalizados, capacidad
5. Formas e integrales armónicas
6. Funciones convexas

Funciones especiales
1. Polinomios como funciones, polinomios ortogonales
2. Funciones exponenciales y trigonométricas
3. Funciones e integrales elípticas, funciones theta, multiplicación compleja
4. Funciones automorfas, funciones modulares
5. Funciones de Bessel
6. Funciones de Legendre, armónicas esféricas
7. Funciones de Lamé y Mathieu
8. Funciones hipergeométricas y generalizaciones
9. Funciones definidas mediante integrales definidas, ecuaciones diferenciales e integrales, series infinitas

Sucesiones, series, sumabilidad
1. Sucesiones y series especiales, momentos
2. Series de potencias y factoriales
3. Series de Dirichlet
4. Operaciones con series y con sucesiones
5. Convergencia y sumabilidad
6. Teoremas de Tauber

Aproximaciones y desarrollos
1. Interpolación: teoría general
2. Aproximaciones y desarrollos, teoría general
3. Sistemas ortogonales, desarrollos
4. Clausura
5. Grado de aproximación, aproximación óptima
6. Aproximaciones y desarrollos asintóticos

Series e integrales trigonométricas
1. Polinomios trigonométricos, series de Fourier
2. Interpolación trigonométrica
3. Coeficientes de Fourier, grado de aproximación
4. Convergencia, sumabilidad
5. Convergencia absoluta
6. Series dobles y múltiples
7. Integrales de Fourier
8. Funciones casi-periódicas

Transformaciones integrales
1. Fórmulas de inversión, funciones autorecíprocas
2. Transformaciones de Laplace y de Fourier
3. Otras transformaciones, Hilbert, Mellin, Hankel

Ecuaciones diferenciales: Ordinarias
1. Existencia y unicidad
2. Aproximación de las soluciones
3. Comportamiento asintótico de las soluciones
4. Singularidades de las soluciones
5. Ecuaciones lineales: segundo orden
6. Ecuaciones lineales: órdenes distintos del segundo
7. Sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales de matrices
8. Estabilidad de las soluciones
9. Periodicidad, oscilación
10. Problemas de contorno, espectros, desarrollos en funciones propias
11. Sistemas dinámicos, propiedades topológicas
12. Tipos especiales

Ecuaciones diferenciales: Parciales

1. Existencia, unicidad, estabilidad
2. Ecuaciones diferenciales totales, problema de Pfaff
3. Teoría analítica y algebraica de los sistemas de ecuaciones
4. Ecuaciones de primer orden
5. Ecuaciones elípticas, problemas de contorno
6. Ecuaciones hiperbólicas, problema de Cauchy
7. Ecuaciones parabólicas
8. Ecuaciones mixtas
9. Clasificación, características
10. Ecuaciones lineales de orden superior
11. Ecuaciones no lineales, tipos especiales
12. Valores propios, funciones propias
13. Métodos aproximados

Ecuaciones en diferencias, ecuaciones funcionales

1. Diferencias finitas y ecuaciones en diferencias
2. Generalizaciones
3. Ecuaciones funcionales

Ecuaciones integrales e integro-diferenciales

1. Ecuaciones integrales lineales
2. Ecuaciones integrales singulares
3. Ecuaciones integrodiferenciales
4. Ecuaciones integrales no lineales
5. Ecuaciones integrales especiales

Cálculo de variaciones

1. Teoría global, métodos topológicos
2. Aplicaciones

ESTRUCTURAS TOPOLOGICO-ALGEBRAICAS

Redes topológicas

Grupos topológicos

1. Representaciones
2. Grupos de la geometría
3. Semigrupos y otras generalizaciones

Grupos y álgebra de Lie

1. Grupos de Lie
2. Representaciones
3. Algebras de Lie, anillos de Lie

Anillos topológicos

Espacios vectoriales topológicos, análisis funcional

1. Espacios funcionales: general
2. Espacios vectoriales topológicos
3. Espacios vectoriales ordenados
4. Espacios de Banach
5. Espacios de Hilbert
6. Espacios de funciones especiales
7. Distribuciones
8. Operadores lineales
9. Grupos y semigrupos de operadores lineales
10. Operadores no lineales
11. Anillos de operadores, álgebras de grupo, álgebras topológicas abstractas y sus representaciones
12. Aplicaciones del análisis funcional; análisis de los operadores diferenciales e integrales

TOPOLOGIA

Topología: general

1. Conjuntos sobre una recta y en los espacios euclídeos
2. Teoremas de recubrimiento
3. Fundamentos, espacios topológicos, teoría abstracta, límites y límites generalizados

4. Espacios métricos y uniformes
5. Topología de los conjuntos de puntos, curvas, continuos
6. Propiedades de los puntos fijos
7. Dinámica topológica
8. Aplicaciones al análisis

Topología: algebraica
1. Homología y cohomología
2. Homotopía
3. Espacios fibrados
4. Variedades
5. Teoremas de los puntos fijos
6. Enlaces, nudos
7. Complejos y poliedros
8. Topología de los espacios de grupo y H-espacios
9. Transformaciones y aplicaciones especiales
10. Teoría de la dimensión
11. Grafos, problema de los cuatro colores

GEOMETRIA

Geometrías, euclídea y otras
1. Fundamentos
2. Geometría elemental
3. Triángulos, tetraedros
4. Círculos, esferas, geometría inversiva
5. Construcciones
6. Geometrías finitas, configuraciones, figuras regulares, divisiones de espacios
7. Vectores, cuaterniones, álgebra tensorial
8. Coordenadas, métodos analíticos
9. Cónicas, cuádricas
10. Geometría afín
11. Geometría proyectiva
12. Geometría no euclídea
13. Geometrías n dimensionales e hipercomplejas
14. Geometría de Minkowski
15. Geometría descriptiva

Dominios convexos, geometrías con distancia
1. Regiones convexas, teoría de Brunn-Minkowski
2. Propiedades extremales y desigualdades geométricas
3. Geometrías con distancia

Geometría diferencial
1. Métodos directos
2. Geometría diferencial clásica
3. Análisis vectorial y tensorial
4. Métodos cinemáticos y geometría integral
5. Superficies mínimas
6. Familias de curvas, redes, mallas
7. Deformación de superficies
8. Geometría diferencial sobre la recta, geometría de Laguerre y otras geometrías esféricas
9. Elementos lineales y de orden superior
10. Geometría diferencial global
11. Geometría proyectiva diferencial
12. Geometría diferencial frente a otros grupos: afín, inversiva, conforme, no euclídea

Variedades, conexiones
1. Geometría riemanniana
2. Caminos y conexiones: general
3. Geometría no riemanniana conexiones conforme, afín y proyectiva
4. Espacios de Finsler, geometría diferencial abstracta

Variedades complejas

Geometría algebraica
1. Variedades especiales, curvas, superficies
2. Teoría general de las variedades, superficies
3. Teoría general de las curvas

4. Teoría de las intersecciones
5. Variedades de grupo, abelianas, teorías de equivalencia
6. Transformaciones algebraicas
7. Funciones algebraicas

ANALISIS NUMERICO

Métodos numéricos
1. Métodos matemáticos generales, iteración
2. Métodos de Monte Carlo
3. Interpolación, nivelación, mínimos cuadrados, ajuste de curvas, aproximación de funciones
4. Cálculo de funciones especiales, series, integrales
5. Desigualdades lineales, programación lineal
6. Ecuaciones lineales, determinantes, matrices
7. Valores propios, vectores propios, método de Rayleigh-Ritz
8. Sistemas no lineales
9. Raíces de las ecuaciones algebraicas y trascendentes
10. Derivación e integración numérica, cuadratura mecánica
11. Ecuaciones diferenciales ordinarias
12. Ecuaciones en derivadas parciales
13. Ecuaciones en diferencias y funcionales
14. Ecuaciones integrales e integrodiferenciales
15. Análisis de errores
16. Métodos gráficos, nomografía
17. Análisis y síntesis armónicas
18. Tablas

Máquinas de calcular
1. Calculadoras digitales: lógica y diseño
2. Calculadoras digitales: codificación y programación
3. Computadoras analógicas
4. Resultados del cálculo a máquina

PROBABILIDAD

1. Fundamentos
2. Teoría elemental
3. Distribuciones
4. Teoremas límites
5. Procesos estocásticos: teoría general
6. Procesos de Markov
7. Procesos estacionarios
8. Procesos especiales, azar
9. Aplicaciones

ESTADISTICA

1. Estadística descriptiva elemental
2. Graduación
3. Distribuciones de funciones estadísticas
4. Teoría de la estimación (caso paramétrico)
5. Ensayo de hipótesis (caso paramétrico)
6. Métodos no paramétricos y estadística de orden
7. Diseño y análisis de los experimentos
8. Teoría de la decisión
9. Procedimientos de decisión múltiple, análisis sucesivo
10. Ingeniería estadística, control de calidad
11. Inspecciones de muestreo
12. Series temporales
13. Aplicaciones

APLICACIONES A LA FISICA

Mecánica de las partículas y de los sistemas
1. Fundamentos
2. Estática
3. Cinemática, mecánica, sistemas
4. Dinámica
5. Oscilaciones, estabilidad
6. Balística exterior,

satélites artificiales
7. Masa variable, cohetes

Termodinámica y mecánica estadísticas.
1. Gases
2. Líquidos
3. Sólidos, cristales
4. Mecánica cuántica estadística
5. Termodinámica estadística
6. Termodinámica irreversible

Elasticidad, plasticidad.
1. Fundamentos de la mecánica de los sólidos deformables
2. Esfuerzos y deformaciones planos
3. Problemas tridimensionales
4. Flexiones y torsiones
5. Vigas y columnas
6. Placas, superficies delgadas y membranas
7. Cuerpos no isótropos
8. Vibraciones, dinámica estructural
9. Estabilidad, selección, rotura
10. Propagación de ondas
11. Visco-elasticidad
12. Plasticidad, arrastre
13. Mecánica de sólidos
14. Termomecánica

Estructura de la materia
1. Estado líquido
2. Estado sólido

Mecánica de fluidos, acústica
1. Fundamentos
2. Fluidos incompresibles: teoría general
3. Fluidos incompresibles ~~con fronteras especiales~~
4. Flujo a superficie libre, ondas de agua, chorros, estelas
5. Fluidos viscosos
6. Teoría de los estratos
7. Estabilidad del flujo
8. Turbulencia
9. Fluidos compresibles: teoría general
10. Fluidos compresibles: flujo subsónico
11. Fluidos compresibles: flujo transónico
12. Fluidos compresibles: flujo supersónico e hipersónico
13. Ondas de choque
14. Acústica
15. Fluidos no newtonianos
16. Magneto-hidrodinámica
17. Difusión, filtración

Optica, teoría electromagnética, circuitos
1. Optica geométrica
2. Optica física
3. Optica electrónica
4. Teoría electromagnética
5. Electro- y magnetostática
6. Ondas y radiación
7. Difracción, dispersión
8. Antenas, guías de ondas
9. Circuitos, redes
10. Aplicaciones técnicas

Termodinámica clásica, transferencia de calor
1. Termodinámica clásica
2. Transferencias de calor y masa
3. Combustión
4. Cinética química

Mecánica cuántica
1. Teoría general
2. Teoría cuántica de los campos
3. Física atómica y nuclear
4. Partículas elementales

Relatividad
1. Relatividad especial
2. ~~Relatividad general~~
3. Teorías unitarias del campo
4. Otras teorías relativistas

Astronomía
1. Mecánica celeste
2. Dinámica galáctica y estelar
3. Problema de los tres y de los n cuerpos
4. Orbitas

5. Estructura de las estrellas
6. Atmósferas estelares, transferencia de radiación
7. Hidrodinámica y problemas hidromagnéticos
8. Cosmología
9. Problemas especiales
10. Radioastronomía

Geofísica
1. Hidrología, hidrografía, oceanografía
2. Meteorología
3. Sismología
4. Potenciales, prospección, forma de la tierra
5. Geo-electricidad y magnetismo
6. Geodesia, problemas de mapas

OTRAS APLICACIONES

Economía, ciencia administrativa
1. Econometría
2. Teoría actuarial
3. Ciencia administrativa, investigación operacional

Programación, distribución de recursos, juegos
1. Programación lineal y no lineal
2. Juegos

Biología y sociología
1. Biología
2. Genética
3. Demografía
4. Sociología
5. Psicología

Teoría de la información y de las comunicaciones
1. Teoría de la información
2. Teoría de las comunicaciones
3. Lingüística

Sistemas de control
1. Servomecanismos
2. Circuitos de interruptores, relevadores

HISTORIA, BIOGRAFIA

1. Matemática antigua y matemática medieval
2. Matemática moderna
3. India, Lejano Oriente, Maya
4. Astronomía y física
5. Biografía de
6. Necrología de
7. Obras seleccionadas o colecciones de

MISCELANEA

1. Textos generales
2. Colecciones de fórmulas
3. Bibliografía
4. Diccionarios
5. Recreaciones

INDICE ALFABETICO

Los números indican las páginas en el texto.